# Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Achim Schädle, Marina Fischer

- Vorlesung: Mittwoch + Donnerstag 8:30-10:00 Uhr
- Übung: Mittwoch 10:30-12:00 Uhr

→ Homepage `http://www.am.uni-duesseldorf.de/~schaedle/lehre/so2020/numerikIII/`



# 4 Mehrschrittverfahren

## 4 Mehrschrittverfahren

In diesem Kapitel suchen wir wieder nach Näherungen für die Lösung $y : [t_0, T] \to \mathbb{R}^d$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{y}'(t) &= f(t, y(t)), \qquad t \in [t_0, T] \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned} \qquad \text{(AWP)}$$

Hierbei sei $f : U \to \mathbb{R}^d$, wobei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ eine offene und zusammenhängende Menge ist und $(t_0, y_0) \in U$.



$\Delta = \{ t_0, t_1, \ldots t_k \}$

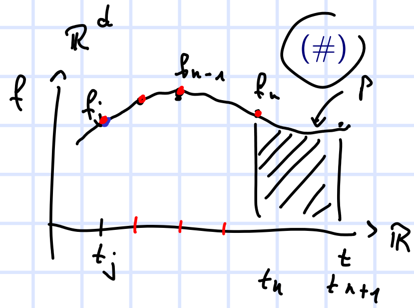
### ( 4.1 ) Explizite Adams Verfahren (1855)

*Ähnlich wie RKV kann man auch* Adams-Verfahren *mit Hilfe numerischer Integration herleiten. Wir starten mit* expliziten Adams-Verfahren *(Adams, 1855).*
*Angenommen, wir kennen bereits* $y_0, \ldots, y_n$ *als Näherungen für* $y(t_0), \ldots, y(t_n)$ *und möchten* $y_{n+1}$ *berechnen. Dann ersetzen wir in der Formel für die exakte Lösung zur Zeit* $t_{n+1}$*:*

$$\longrightarrow \quad y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \underbrace{f(t, y(t))}dt$$

$f(t, y(t))$ *durch das Interpolationspolynom* $p$ *durch die Punkte*

$$(t_{n-k+1}, f_{n-k+1}), \ldots, (t_n, f_n), \qquad \underbrace{f_j := f(t_j, y_j)}.$$



Es gilt (Newtoninterpolationsformel)

$$p(t) = \sum_{\ell=0}^{k-1} \left( \prod_{i=0}^{\ell-1} (t - t_{n-j}) \right) \delta^\ell f[t_n, t_{n-1}, \dots t_{n-\ell}]$$

| $t_j$ | $f_j$ |
|---|---|
| $t_0$ 1 | 3 |
| $t_1$ 2 | 4 |
| $t_2$ 3 | 5 |

$\delta f[t_0, t_1]$ ...

und damit

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{\ell=0}^{k-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \prod_{i=0}^{\ell-1} (t - t_{n-j}) \, \delta^\ell f[t_n, t_{n-1}, \dots t_{n-\ell}] \, dt \Leftarrow$$

Für den Spezialfall $t_\ell = t_0 + \ell h$ (äquidistantes Gitter) ist

$$\delta^\ell f[t_n, \dots t_{n-\ell}] = \frac{\nabla^\ell f_n}{\ell! \, h^\ell}$$

$f_n = f(t_n, y_n)$

für $\nabla^0 f_n = f_n$ $\quad \nabla^j f_n = \nabla^{j-1} f_n - \nabla^{j-1} f_{n-1}$

und damit

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{\ell=0}^{k-1} \gamma_\ell \nabla^\ell f_n \quad \text{für} \quad \gamma_\ell = \frac{1}{\ell!} \int_0^1 \prod_{i=0}^{\ell-1} (i+s) \, ds$$



| $\ell$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\gamma_\ell$ | 1 | $1/2$ | $5/12$ | $3/8$ | $251/720$ | |

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{\ell=0}^{k-1} \gamma_\ell \nabla^\ell f_n$$

$$\nabla^\ell f_n = \nabla^{\ell-1} f_n - \nabla^{\ell-1} f_{n-1} \Leftarrow \ell = 1$$

$$\nabla^0 f_n = f_n$$

$k=1$ $\quad y_{n+1} = y_n + h \gamma_0 f_n = y_n + h f_n$ "explizites Eulerverfahren"

$k=2$ $\quad y_{n+1} = y_n + h(\gamma_0 f_n + \gamma_1 (f_n - f_{n-1})) = y_n + h\left(\frac{3}{2} f_n - \frac{1}{2} f_{n-1}\right)$

$k=3$ $\quad y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{23}{12} f_n - \frac{16}{12} f_{n-1} + \frac{5}{12} f_{n-2}\right)$

$k=4$ $\quad y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{55}{24} f_n - \frac{39}{24} + \frac{37}{24} f_{n-2} - \frac{9}{24} f_{n-3}\right)$

$\vdots$

Achtung! Man verwendet das Interpolationspolynom außerhalb des Intervalls $[t_{n-k+1}, t_n]$

$\rightsquigarrow$ große Fehlerkonstante

## (4.2) Implizite Adams Verfahren

Man verwendet in (#) $\underline{y(t_{n+1})} = \underline{y(t_n)} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tau, y(\tau))\, d\tau$ das Interpolationspolynom $p^k$ vom Grad $\leq k$, das

$$p^k(t_\ell) = f(t_\ell, y_\ell) = f_\ell \quad \text{für } \ell = n - \underline{k}+1, \dots, n+1+\underline{0}$$

erfüllt und setzt

$$\underline{y_{n+1}} = \underline{\underline{y_n}} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} p^k(\tau)\, d\tau$$

Wie in (4.1) ist

$$p^k(t) = \sum_{\ell=0}^{k} \prod_{\underline{i=0}}^{\ell} (t - t_{n+1-\underline{i}})\, \delta^\ell f[t_{n+1}, t_n, \dots t_{n+1-\ell}]$$

und damit

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{\ell=0}^{k} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \prod_{i=0}^{\ell} (t - t_{n+1-i})\, \delta^\ell f[t_{n+1}, \dots t_{n+1-\ell}]$$

Im äquidistanten Fall ergibt sich

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{\ell=0}^{k} \gamma_\ell^k \nabla^\ell f_{n+1} \quad \leftarrow$$

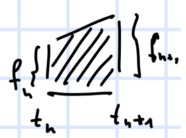


mit $\underset{\sim}{\gamma_0^k} = 1 \qquad \gamma_\ell^k = \frac{1}{\ell!} \int_0^1 \prod_{i=0}^{\ell-1} (i+s-1)\, ds$

| $\ell$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | .... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\gamma_\ell^k$ | 1 | $-1/2$ | $-1/12$ | $-1/24$ | $-19/720$ | .. |

$k=0 \qquad y_{n+1} = y_n + h\, f_{n+1}$ implizites Eulerverfahren

$k=1 \qquad y_{n+1} = y_n + h\left(1\, f_{n+1} - \tfrac{1}{2}(f_{n+1} - f_n)\right) = y_n + h\underbrace{\left(\tfrac{1}{2} f_{n+1} + \tfrac{1}{2} f_n\right)}$ Trapezregel



$k=2 \qquad y_{n+1} = y_n + h\left(\tfrac{5}{12} f_{n+1} + \tfrac{8}{12} f_n - \tfrac{1}{12} f_{n-1}\right)$

$k=3 \qquad y_{n+1} = y_n + h\left(\tfrac{9}{24} f_{n+1} + \tfrac{19}{24} f_n - \tfrac{5}{24} f_{n-1} + \tfrac{1}{24} f_{n-2}\right)$

## (4.3) BDF-Verfahren (backward differentiation formula)

Idee: Statt Polynom durch $(t_j, f_j)$ lege Polynom durch $(t_j, y_j)$

$$q(t_\ell) = y_\ell \quad \text{für} \quad \ell = \underline{n+1}, \dots, n+1-k \qquad q \text{ Polynom vom Grad} \leq k$$

Berechne $y_{n+1}$ aus der Forderung, dass

$$\dot q(t_{n+1}) = f(t_{n+1}, \underbrace{q(t_{n+1})}_{= y_{n+1}})$$

Das Polynom erfüllt die DGL an der Stelle $t_{n+1}$

$$q(t) = \sum_{\ell=0}^{k} \prod_{i=0}^{\ell-1} (t - t_{n+1-i})\, \delta^\ell y[t_{n+1}, \dots, t_{n+1-\ell}]$$

Jeder Summand enthält einen Faktor $\underbrace{(t - t_{n+1})}$ also ist



$$\dot q(t_{n+1}) = \underbrace{\sum_{\ell=1}^{k} \prod_{i=1}^{\ell-1} (t_{n+1} - t_{n+1-i})}\, \delta^\ell y[t_{n+1}, \dots, t_{n+1-\ell}]$$

Für äquidistantes Gitter gilt

$$\sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{\ell} \nabla^\ell y_{n+1} = h f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

$k=1$: $\quad y_{n+1} - y_n = h f_{n+1}$ $\quad$ implizites Eulerverfahren

$k=2$: $\quad \frac{3}{2} y_{n+1} - 2 y_n + \frac{1}{2} y_{n-1} = h f_{n+1}$

$k=3$: $\quad \frac{11}{6} y_{n+1} - 3 y_n + \frac{3}{2} y_{n-1} - \frac{1}{3} y_{n-2} = h f_{n+1}$

## ( 4.4 ) Allgemeine lineare Mehrschrittverfahren (MSV)

*Definition (MSV)*

Das allgemeine lineare $k$- Schrittverfahren zur Lösung des AWPs

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ist durch $\alpha_k y_{n+k} + \alpha_{k-1} y_{n+k-1} + \ldots + \alpha_0 y_n = h\,(\beta_k f_{n+k} + \ldots + \beta_0 f_n)$

mit $y_j = y_\Delta(t_j)$, $f_j = f(t_j, y_j)$

$t_j := t_0 + j h$ hier nur für den äquidistanten Fall

Zur Berechnung der $y_{n+k}$ für $n = 0, 1, 2 \ldots$ sind $k$ Startwerte $y_0, y_1 \ldots y_{k-1}$ erforderlich

(MSV) $\quad \sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}$

Hierbei ist $\alpha_k \neq 0$ und $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$

Das $k$- Schritt Verfahren heißt explizit falls $\beta_k = 0$, sonst implizit



## ( 4.5 ) Lemma

Ist $f$ in $y$ global Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $L$ für alle $t \in \mathbb{R}$ dann gibt es für $h < \frac{|\alpha_k|}{L|\beta_k|}$ und beliebige Startwerte eine eindeutige Gitterfunktion $y_\Delta$ die (MSV) erfüllt

**Beweis** a) $\beta_k = 0$ "$h < \infty$" $Y_\Delta$ explizit gegeben

b) $\beta_k \neq 0$ $\quad$ (MSV) $\iff y_{n+k} = h \frac{\beta_k}{\alpha_k} f(t_{n+k}, y_{n+k}) + \text{"Rest"} = \varphi_h(y_{n+k})$

für "Rest" unabhängig von $y_{n+k}$

$$\| \varphi_h(y_{n+k}) - \varphi_h(\tilde{y}_{n+k}) \| \leq \underbrace{h \frac{|\beta_k|}{|\alpha_k|} L}\, \| y_{n+k} - \tilde{y}_{n+k} \|$$

Falls $h < \frac{|\alpha_k|}{L|\beta_k|}$ dann ist $h \frac{|\beta_k|}{|\alpha_k|} L < 1$ und $\varphi_h$ ist eine Kontraktion

Banachscher Fixpunktsatz $\Rightarrow$ eindeutige Lösung $y_{n+k}$ $\square$