$h^k = h \left(\frac{\varsigma\, TOL}{\|[\varepsilon]\|} \right)^{1/p+1}$

(3.24) Algorithmus

Gegeben $t_0, y_0, (h_0), T \quad q, Tol, \varsigma, \underset{\sim}{\Psi}, \underset{\sim}{\hat{\Psi}}$

1) $j = 0$

2) while $t_j < T$

3) $y = \Psi^{t_j + h_j, t_j}(y_j) \Leftarrow$

4) $\hat{y} = \hat{\Psi}^{t_j + h_j, t_j}(y_j) \leftarrow$

5) $[\varepsilon] = y - \hat{y}$

h_j^k

6) $h = h_j \min \left(q, \underbrace{\left(\frac{\overset{0.8}{\varsigma}\, Tol}{\|[\varepsilon]\|} \right)^{1/p+1}}_{} \right) \leftarrow$

7) if $\|[\varepsilon]\| \leq TOL \Leftarrow$

8) $\quad t_{j+1} = t_j + h_j$

9) $\quad y_{j+1} = y$

10) $\quad h_{j+1} = \quad \min(h, T - t_j)$

11) $\quad j = j + 1$

12) else

13) $\quad h_j = h \quad \leftarrow \quad \|[\varepsilon]\| > TOL$

14) endif

15) endwhile

Bemerkung

6) $\min(q, \ldots)$ für $q > 1$ $(q = 2)$ verhindert, dass für sehr kleine $\|[\varepsilon]\|$ unrealistisch große Schritte verwendet werden

10) die für den aktuellen Schritt optimale Schrittweite wird mit einem Sicherheitsfaktor versehen für den nächsten Schritt verwendet

9) wir verwenden das genauere y, obwohl der Fehler für $\hat{y}$ geschätzt wurde

(3.25) Eingebettete Runge-Kutta-Verfahren

Ziel Minimierung der Anzahl der f-Auswertungen bei der Berechnung von Ψ und $\hat{\Psi}$

Ideen 1) Zu einem RKV Ψ mit $(c, \mathcal{A}, b)$ der Ordnung p konstruiere $\hat{\Psi}$ mit $(c, \mathcal{A}, \hat{b})$ der Ordnung $\hat{p} < p$ mit den selben c und $\mathcal{A}$

Erweitertes Tableau

$$\begin{array}{c|c} c & \mathcal{A} \\ \hline & b^T \\ & \hat{b}^T \end{array}$$

2) Verwendet man zur Konstruktion von $\hat{\Psi}$ die Gewichte b des Verfahrens Ψ und zusätzlich den Knoten $c_{s+1} = 1$ so erhält man ein geschachteltes Verfahren

$$\begin{array}{cc|cccc} & c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1s} & 0 \\ & c_2 & & & & \\ & \vdots & & & & \\ & c_s & a_{s1} & \cdots & a_{ss} & 0 \\ 1 = & c_{s+1} & b_1 & \cdots & b_s & 0 \\ \hline & & b_1 & \cdots & b_s & 0 \\ & & \hat{b}_1 & \cdots & \hat{b}_s & \hat{b}_{s+1} \end{array}$$

Ψ

$\hat{\Psi}$

Zur Bestimmung der $\hat{b}$ löst man ein lineares Gleichungssystem, um die die größtmögliche Ordnung für $\hat{\Psi}$ zu erzielen

$$\ulcorner \quad \underline{b}^T A^{(p)} = \frac{1}{p!} \quad \forall\, |p| \le p \quad \lrcorner$$

$\uparrow$ lineare Gleichung in b für alle p

$$c/6 = c/8 + c/24$$

<u>Beispiel</u> Für die $3/8$-Regel ist

$$\boxed{\hat{b}_1 = b_1 - \frac{c}{24}, \quad \hat{b}_2 = b_2 + \underline{\frac{c}{8}}, \quad \hat{b}_3 = b_3 - \underline{\frac{c}{8}}, \quad \hat{b}_4 = b_4 - \frac{c}{8}, \quad \hat{b}_5 = \frac{c}{6}}$$

<u>LGS</u>

I) $\hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3 + \hat{b}_4 + \hat{b}_5 = 1 \leftarrow$

II) $\hat{b}_1 \underbrace{c_1}_{=0} + \hat{b}_2 \underbrace{c_2}_{1/3} + \hat{b}_3 \underbrace{c_3}_{2/3} + \hat{b}_4 \underbrace{c_4}_{1} + \hat{b}_5 \underbrace{c_5}_{1} = 1/2$

III) $\hat{b}_1 0 + \hat{b}_2 1/9 + \hat{b}_3 4/9 + \hat{b}_4 + \hat{b}_5 = 1/3$

IV) $(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, \hat{b}_4, \hat{b}_5) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & & & 0 & \\ a_{31} & a_{32} & & & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & & \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1/6$

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1/3 & 0 & & 0 & \\ -1/3 & 1 & 0 & & \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \\ 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 4/8 \end{pmatrix}$$

$\underline{\overline{IV}}$ $\quad \frac{1}{3}\hat{b}_3 + \frac{1}{3}\hat{b}_4 + \frac{1}{2}\hat{b}_5 = \frac{1}{6}$

$\underline{\overline{V}}$ $\quad \hat{b}_1 \cdot 0 + \hat{b}_2 \frac{1}{27} + \hat{b}_3 \frac{8}{27} + \hat{b}_4 + \hat{b}_5 = \frac{1}{4}$

Lösung von $\overline{I}) \cdots \overline{V})$

Für $\boxed{c = 1}$ erhält man

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(h) &= y_{n+1} - \hat{y}_{n+1} \\ &= h\left((b_1 - \hat{b}_1)\dot{Y}_1 + (b_2 - \hat{b}_2)\dot{Y}_2 + (b_3 - \hat{b}_3)\dot{Y}_3 + (b_4 - \hat{b}_4)\dot{Y}_4 + (0 - \hat{b}_5)\, f(t_{n+1}, y_{n+1}) \right) \\ &= h\left(\tfrac{1}{24}\dot{Y}_1 - \tfrac{1}{8}\dot{Y}_2 + \tfrac{1}{8}\dot{Y}_3 + \tfrac{1}{8}\dot{Y}_4 - \tfrac{1}{6} f(t_{n+1}, y_{n+1}) \right) \end{aligned}$$

$\Delta = (t_0, t_1, \ldots, t_N)$

(3.26) Erzielter Diskretisierungsfehler

Bei der Schrittweitensteuerung wurde $\|\varepsilon_n\| \leq TOL$ erreicht. Wie groß ist $\varepsilon_\Delta = \max_{t \in \Delta} \|\varepsilon_\Delta(t)\|$?

$$\begin{aligned} \varepsilon_\Delta(t_{n+1}) &= y(t_{n+1}) - y_{n+1} \\ &= \underbrace{\underline{\Phi}^{t_{n+1}, t_n}(\underline{y}(t_n)) - \underline{\Phi}^{t_{n+1}, t_n}(y_n)}_{\bar{\varepsilon}_n} + \underbrace{\underline{\Phi}^{t_{n+1}, t_n}(y_n) - y_{n+1}}_{\overline{\varepsilon_n}} \end{aligned}$$

$y_n = y(t_n) - \varepsilon_\Delta(t_n)$

$$\begin{aligned} &\overset{y_n = y(t_n) - \varepsilon_\Delta(t_n)}{=} \varepsilon_n + D\underline{\Phi}^{t_{n+1}, t_n}(y(t_n)) \cdot \varepsilon_\Delta(t_n) + \mathcal{O}(\|\varepsilon_\Delta(t_n)\|^2) \\ &= \varepsilon_n + W(t_{n+1}, t_n)\, \varepsilon_\Delta(t_n) + \mathcal{O}(\|\varepsilon_\Delta(t_n)\|^2) \end{aligned}$$

Da $\quad W(t_{n+2}, t_n) = W(t_{n+2}, t_{n+1})\, W(t_{n+1}, t_n)$ gilt insgesamt

$$\varepsilon_\Delta(t_k) = \sum_{j=1}^{k} W(t_k, t_j)\, \underline{\underline{\varepsilon_{j-1}}} + \text{„Terme höherer Ordnung"}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon_\Delta}} = \max_{t_n \in \Delta} \| \varepsilon_\Delta(t_n) \|$$

Ist $\| \varepsilon_j \| \leq TOL$ so gilt

$$\varepsilon_\Delta \leq TOL \sum_{j=0}^{N} \| W(T, t_j) \| + \text{"Terme höherer Ordnung"}$$

Mit $\kappa_j(t) = \| W(t, t_j) \|$ (punktweise Kondition) $\leftarrow$ Eigenschaft der DGL

gilt falls $\underline{\kappa_j(t_{j+1})} \leq \kappa \quad \forall j$

$$\kappa_j(T) \leq \kappa_j(t_{j+1}) \cdots \kappa_{N-1}(T) \leq \kappa^{N-j}$$

$$\varepsilon_\Delta \leq TOL \sum_{j=1}^{N} \kappa^{N-j} + \text{"Terme höherer Ordnung"}$$

$$= TOL \frac{\kappa^N - 1}{\kappa - 1}$$

Ist $\kappa \approx 1$ so gilt $\varepsilon_\Delta \lesssim N \cdot TOL$

4 Mehrschrittverfahren

4 Mehrschrittverfahren

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

Lösung $\quad y : [t_0, T] \to \mathbb{R}^d$ stetig diffbar

Bisher: Einschrittverfahren

Berechne Gitterfunktion $y_\Delta : \Delta \to \mathbb{R}^d$

auf Gitter $\Delta = \{t_0 \dots t_N\}$

sodass

$$y_\Delta(t_j) \; (= y_j) \approx y(t_j)$$

$$y_\Delta(t_{j+1}) = \Psi^{t_{j+1}, t_j}(y_\Delta(t_j))$$

Zur Berechnung von $\uparrow$ verwendet man nur $\uparrow$

Informationen aus der weiter zurückliegenden Vergangenheit gingen verloren

Ziel: Verfahren hoher Ordnung mit weniger Auswertungen von f.

(4.1) Explizite Adams Verfahren (1855)

$$\underline{y(t_{n+1})} = y(t_n) + \underline{\int_{t_n}^{t_{n+1}}} \underbrace{f(\tau, y(\tau))}\, d\tau \qquad (\#)$$

Interpolationspolynom p vom Grad $\leq k-1$

durch k Punkte

$$\big(t_n, \underbrace{f(t_n, y_n)}_{\in \mathbb{R}^d}\big), \; \big(t_{n-1}, f(t_{n-1}, y_{n-1})\big), \dots \big(t_{n-k+1}, f(t_{n-k+1}, y_{n-k+1})\big)$$

Setze $\quad y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} p(\tau)\, d\tau$