(3.17) Satz (Taylorentwicklung des diskreten Flusses)

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^s \underline{b_i} \, \dot{Y}_i \\ \dot{Y}_i = f(Y_i) \\ \quad Y_i = y_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \, \dot{Y}_j \end{cases}$$

Für $f \in C^{p+1}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ gilt für den diskreten Fluss

$$\Psi^{t+h,t}(y) = y + \sum_{|\beta| \le p} h^{|\beta|} \alpha_\beta \boxed{b^T A^{(\beta)}} \mathcal{F}(\beta)(y) + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

wobei $A^{(\beta)} \in \mathbb{R}^s$ für Wurzelbaum $\beta = [\underline{\beta_1}, \dots \underline{\beta_m}]$

$\to \quad A_i^{(\beta)} := \prod_{j=1}^m (\mathfrak{A} A^{(\beta_j)})_i \quad i = 1 .. s \quad \leftarrow$

$A^{(\cdot)} = (1, .. 1)^T \in \mathbb{R}^s$

$\mathfrak{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^s \qquad b = (b_1 .. b_s)^T \quad \leftarrow$ Koeffizienten des s-stufigen RKV$_s$

Beweis Induktion über p

$$\dot{Y}_i = f(y + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \dot{Y}_j)$$

IA: $p = 0$ ✓

IS: $p \rightsquigarrow p+1$

$$\Psi^{t+h,t}(y) = y + h \sum_{i=1}^s b_i \boxed{\dot{Y}_i}$$

$$\overset{\text{Induktionsvoraussetzung}}{=} y + \underline{h} \Big(\underline{\sum_{i=1}^s} b_i \sum_{|\beta| \le p} h^{|\beta|-1} \alpha_\beta A_i^{(\beta)} \mathcal{F}(\beta)(y) + \mathcal{O}(h^p) \Big) \quad (1)$$

Einsetzen in $\dot{Y}_i = f(y + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \dot{Y}_j)$

$$= f\Big(y + h \underline{\sum_{j=1}^s} \underline{a_{ij}} \Big(\sum_{|\beta| \le p} h^{|\beta|-1} \alpha_\beta \underline{A_j^{(\beta)}} \mathcal{F}(\beta)(y) + \mathcal{O}(h^p)\Big)\Big)$$

$$= f\Big(y + \underbrace{\sum_{|\beta| \le p} h^{|\beta|} \alpha_\beta (\mathfrak{A} A^{(\beta)})_i \mathcal{F}(\beta)(y) + \mathcal{O}(h^p)}\Big)$$

Taylor $\quad = \sum_{n=0}^p \frac{1}{n!} f^{(n)}(y) \Big(\sum_{|\beta_1| \le p} h^{|\beta_1|} (\mathfrak{A} A^{(\beta_1)})_i \mathcal{F}(\beta_1)(y) + \mathcal{O}(h^p)\Big), \dots$

$$\ldots \sum_{|p_n|\le p} h^{|p_n|} \underbrace{\alpha_{p_n} (\mathfrak{A} A^{(p_n)})_i \mathcal{F}(p_n)(y) + \mathcal{O}(h^p)}\Big) + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

$$\underset{\substack{\text{Linearität}\\ \text{von } f^{(n)}}}{=} \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!} \sum_{\sum_{k=1}^{n} |p_k| \le p} h^{\underbrace{\sum_{k=1}^{n} |p_k|}} \prod_{k=1}^{n} \alpha_{p_k} (\mathfrak{A} A^{(p_k)})_i \, f^{(n)}(y)\big(\mathcal{F}(p_1)(y) \ldots \mathcal{F}(p_n)(y)\big) + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

$$= \sum_{n=0}^{p} \sum_{\substack{p = [p_1 \ldots p_n] \\ |p| \le p+1}} h^{|p|-1} \underbrace{\frac{S_p}{n!} \alpha_{p_1} \cdots \alpha_{p_n}}_{\alpha_p} A^{(p)}_i \mathcal{F}(p)(y) + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

$$= \sum_{|p| \le p+1} h^{|p|-1} \alpha_p A^{(p)}_i \mathcal{F}(p)(y) + \mathcal{O}(h^{p+1}) \qquad (= \dot{Y}_i)$$

Einsetzen in (Δ) liefert die Behauptung □

(3.18) Satz (Butcher 1963)

„Ordnung p" $\Longleftrightarrow$ „$b^T A^{(p)} = \frac{1}{p!} \quad \forall\, |p| \le p$"

i) Gilt $b^T A^{(p)} = 1/p!$ für alle Wurzelbäume p mit $|p| \le p$ so hat das RKV $(b, \mathfrak{A})$ die Ordnung p für alle $f \in C^{p+1}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$

ii) Hat ein RKV $(b, \mathfrak{A})$ Ordnung p für jedes Vektorfeld $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ eines AWPs mit $y(0) = y_0$ und beliebigem $d \in \mathbb{N}$ so ist $b^T A^{(p)} = 1/p!$ für alle Wurzelbäume mit $|p| \le p$

Beweis i) Koeffizientenvergleich (3,16) und (3.17)

ii) lineare Unabhängigkeit der elementaren Differentiale /ÜA/

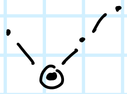
(3.19) Bemerkung

$b^T A^{(p)} = \frac{1}{p!}$

Ein RKV $(b, \mathfrak{A})$ kann die Ordnung p haben, ohne dass alle Bedingungsgleichungen erfüllt sind.

Für $d = 1$ gilt beispielweise

$$[\,[\cdot\,],\cdot\,] \text{ "=" } f''(f'f, f) \overset{d=1}{=} f''f'f^2 \overset{d=1}{=} f'f''(f,f) \text{ "=" } [\,[\,\cdot,\cdot\,]\,]$$



Zwei Bedingungsgleichungen fallen zusammen, da für $d = 1$ die beiden elementaren Differentiale linear abhängig sind. Die Bedingungsgleichungen sind notwendig falls die elementaren Differentiale linear unabhängig sind.

(3.20) Beispiel

$\sum_{j=1}^{s} a_{ij} = c_i$

$b^T A^{(p)} = 1/p!$

$A^{(\cdot)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$

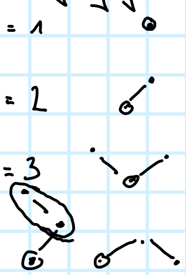
$p! = |p| \prod_{i=1}^{m} p_m!$

$p = [p_1 \dots p_m]$

$A^{[\cdot]}$

$A^{(p)}_i = \prod_{j=1}^{m} (\mathfrak{A} A^{(p_j)})_i$

Bedingungsgleichungen für $p = 4$



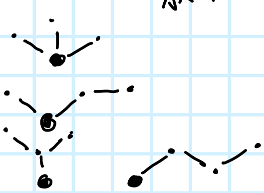
1) $p = 1$ $\quad \sum_{j=1}^{s} b_i = 1 \quad p = \odot, \quad \odot! = 1$

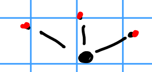
2) $p = 2$ $\quad \sum_{j,i=1}^{s} b_i \underbrace{a_{ij}}_{c_i} = 1/2 \quad p = [\odot], \quad [\odot]! = 2$

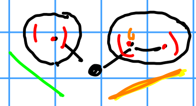
3) $p = 3$ $\quad \sum_{j,i,k=1}^{s} b_i \underbrace{a_{ij}}\underbrace{a_{ik}} = 1/3 \quad p = [\,\cdot\,,\,\cdot\,]\,. \quad [\,\cdot,\cdot\,]! = 3$

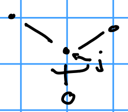
4) $\quad \sum_{i,j,k=1}^{s} b_i a_{ij} a_{jk} = 1/6 \quad p = [\,[\,\cdot\,]\,], \quad [\,[\,\cdot\,]\,]! = 6$

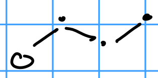
$p = 4$



5)  $\sum_{i,j,k,l=1}^{s} b_i \underbrace{a_{ij}}\, \underbrace{a_{ik}}\, \underbrace{a_{il}} = 1/4$ $\quad p = [\cdot, \cdot, \cdot] \quad p! = 4$

6)  $\underbrace{\sum_{i,j,k,l=1}^{s} b_i \underbrace{a_{ij}}_{c_i}\, a_{ik} \underbrace{a_{kl}}_{c_k} = 1/8}$ $\quad \underline{p = [\cdot, [\cdot, \cdot]]} \quad p! = 8$

7)  $\sum_{i,j,k,l=1}^{s} b_i\, a_{ij}\, a_{jk}\, a_{jl} = 1/12$ $\quad p = [[\cdot, \cdot]] \quad p! = 12$

8)  $\sum_{i,j,k,l=1}^{s} b_i\, a_{ij}\, a_{jk}\, a_{kl} = 1/24$ $\quad p = [[[\cdot]]] \quad p! = 24$

(3.21) Die $\frac{3}{8}$-Regel

Die Bedingungen 1), 2), 3) und 5) sind Bedingungen an eine Quadraturformel mit Gewichten b_i und Knoten $c_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}$ die für Polynome bis Grad 3 auf $[0,1]$ exakt ist. $c = A\mathbb{1}$

$c_1 = 0 \quad c_2 = 1/3 \quad c_3 = 2/3 \quad c_4 = 1$

$b_1 = 1/8 \quad b_2 = 3/8 \quad b_3 = 3/8 \quad b_4 = 1/8$

Aus 4) und 6) folgt

4) $\quad (1/8, 3/8, 3/8, 1/8) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{A\mathbb{1}} = 1/6$

$\Leftrightarrow$
$(1/8, 3/8, 3/8, 1/8) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3\, a_{32} \\ 1/3\, a_{42} + 2/3\, a_{43} \end{pmatrix} = 1/6$

$\Leftrightarrow 4)\quad 1/8\, a_{32} + \underline{1/24\, a_{42}} + 2/24\, \underline{a_{43}} = 1/6$

6) $\quad \sum_{i,j=1}^{s} b_i\, a_{ij}\, c_i c_j = 1/8$

$\Leftrightarrow \quad b_3\, a_{32}\, c_3 c_2 + b_4\, a_{42}\, c_4 c_2 + b_4\, a_{43}\, c_4 c_3 = 1/8$

$\Leftrightarrow 6)\quad 1/12\, a_{32} + \underline{1/24\, a_{42}} + 1/12\, \underline{a_{43}} = 1/8$

$4) - 6) \quad (1/8 - 1/12)\, a_{32} = 1/6 - 1/8$

$1/24\, a_{32} = 1/24 \Rightarrow a_{32} = 1$

$$\left.\begin{aligned} &6')\quad a_{42} + 2a_{43} = 3-2 = 1 \\ &8)\quad a_{43} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_{42} = -1$$

Hoffentlich ist 7) erfüllt! :)

1
2
3
5
4
6
8