(3.12) Autonomisierung

Das AWP (*) $\begin{cases} \dot{y} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ $\leftarrow$

mit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ist

äquivalent zu

(**) $\begin{cases} \dot{z} = F(z) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$ $\leftarrow$ $\quad \in \mathbb{R}^{d+1}$

für $z(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ t \end{bmatrix}$ und

$F(z) = \begin{bmatrix} f(t,y) \\ 1 \end{bmatrix}$ $\qquad z_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ t_0 \end{bmatrix}$

Jedes AWP ist äquivalent zu einem autonomen AWP

Wendet man ein RKV auf (*) an

$\rightarrow \begin{cases} y_1 = y_0 + h \sum_{j=1}^s b_j \dot{Y}_j \\ \dot{Y}_j = f(t_0 + \underbrace{c_j h}, \underbrace{y_0 + h \sum_{i=1}^s a_{ji} \dot{Y}_i}_{Y_j}) \end{cases} \quad j = 1..s$

bzw (**) an

$\begin{cases} z_1 = z_0 + h \sum_{j=1}^s b_j \dot{Z}_j & \leftarrow \\ \dot{Z}_j = F(z_0 + h \sum_{i=1}^s a_{ji} \dot{Z}_i) & \leftarrow \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ t_0 \end{bmatrix} + h \sum_{j=1}^s b_j \begin{bmatrix} \dot{\tilde{Y}}_j \\ \dot{T}_j \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\tilde{Y}}_j \\ \dot{T}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t_0 + h \sum_{k=1}^s a_{jk} \underbrace{\dot{T}_k}_{1}, y_0 + h \sum_{k=1}^s a_{jk} \dot{\tilde{Y}}_j \end{bmatrix}$

Da $\dot{T}_j = 1$ für $j = 1..s$ ergibt sich

Lemma Ein RKV ist für alle rechte Seiten Funktionen f invariant unter Autonomisierung falls es konsistent ist und

$\rightarrow \quad \sum_{j=1}^s a_{ij} = c_i \quad$ für $i = 1..s$ gilt

(Konsistenz : $\tilde{t}_1 = t_1$ da $\sum_{i=1}^s b_i = 1$)

Beispiel

$y_1 = y_0 + h f(t_0 + h, y_0)$

ist nicht invariant unter Autonomisierung

und hat Ordnung 1

$s = 1$

$c_1 = 1$

$b_1 = 1$

$a_{11} = 0$

(3.13) Lemma

Besitzt ein s-stufiges explizites RKV die Ordnung p so ist $p \leq s$

Beweis |LiA|

(3.14) Taylorentwicklung in mehreren Variablen

Wdh Analysis II

Satz Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ $(p+1)$ mal stetig differenzierbar $y \in \mathbb{R}^d$, $h \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt

$$\underbrace{f(\underbrace{y+h}_{\in \mathbb{R}^d})} = \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{1}{\alpha!} \underbrace{\partial^\alpha f(y)}_{\mathbb{R}^d} \underbrace{h^\alpha} + \mathcal{O}(\|h\|^{p+1})$$

für eine Multiindex $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$

$|\alpha| := \sum_{j=1}^d \alpha_j$ $\quad \underbrace{\alpha! := \prod_{j=1}^d \alpha_j} \quad \underbrace{h^\alpha := \prod_{j=1}^d h_j^{\alpha_j}}_{\in \mathbb{R}}$

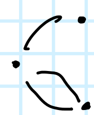
$$\partial^\alpha f(x) = \underbrace{\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \underbrace{f(x)}_{\mathbb{R}^d}}_{\mathbb{R}^d}$$

(3.15) Bäume

Ziel: Geschicktes Rechnen mit den Koeffizienten der Taylorentwicklung

$$\dot{y} = f(y)$$
$$\ddot{y} = f'(y)\cdot\dot{y}$$
$$\dddot{y} = f''(y)(\dot{y},\dot{y}) + f'(y)\cdot\ddot{y}$$
$$y^{(4)} = f^{(3)}(y)(\dot{y},\dot{y},\dot{y}) + 3\, f''(y)(\ddot{y},\dot{y}) + f'(y)\cdot\dddot{y}$$
$$y^{(5)} = f^{(4)}(y)(\dot{y},\dot{y},\dot{y},\dot{y}) + 6\, f'''(y)(\ddot{y},\dot{y},\dot{y}) + 4\, f''(y)(\dddot{y},\dot{y}) + 3\, f''(y)(\ddot{y},\ddot{y})$$
$$+\, f'(y)\cdot y^{(4)}$$

Definition 0



Ein Graph ist eine Menge von Knoten V (vertices) und Kanten E (edges) mit einer Abbildung

$i : E \to \binom{V}{2}$ (Menge der zweielementigen Teilmengen von V)

Ist für $\kappa \in E$ $\quad i(\kappa) = \{a, b\}$ so sagt man, dass κ die Knoten a und b $(a, b \in V)$ verbindet

$$\text{Graph} = (V, E, i)$$

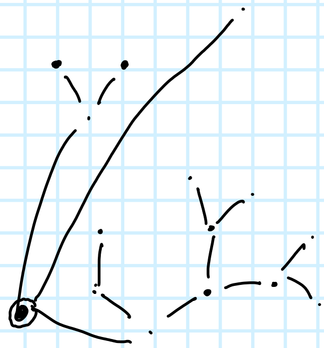
Definition 1

Die Menge der Wurzelbäume T wird rekursiv wie folgt definiert

i) Der Graph der nur aus einen Knoten $\bullet$ besteht gehört zu T und $\bullet$ ist seine Wurzel

ii) Seien $\tau_1, \dots \tau_m \in T$ dann ist der Graph den man erhält indem man die m Wurzeln der $\tau_1 .. \tau_m$ mit einem <u>neuen</u> Knoten verbindet

$\rightarrow$ $\tau = [\tau_1, \tau_2 .. , \tau_m]$ ebenfalls in T und der neue Knoten ist die Wurzel von τ



Definition 2

Die Ordnung $|\tau|$ eines Baumes $\tau \in T$ ist die Anzahl seiner Knoten

Definition 3

Für eine Baum $\tau \in T$ wird das elementare Differential $\mathcal{F}(\tau) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ von f rekursiv durch

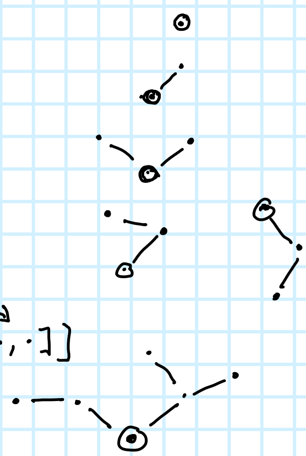
$$\mathcal{F}(\bullet) : y \mapsto f(y) \qquad \mathcal{F}(\cdot)(y) = f(y)$$

und $\mathcal{F}(\tau) : y \mapsto f^{(m)}(y)\big(\mathcal{F}(\tau_1)(y), \dots \mathcal{F}(\tau_m)(y)\big)$

für $\tau = [\tau_1 .. \tau_m]$ definiert

Beispiel 4

Baum	Graph
$\tau = \bullet$	
$\tau = [\cdot]$	
$\tau = [\cdot, \cdot]$	
$\tau = [[\cdot]]$	
$\tau = [[\cdot], [\cdot, \cdot]]$	



Lemma 5

Es gilt $|\tau| = 1 + \sum_{j=1}^{m} |\tau_j|$

$\tau = [\tau_1 \dots \tau_m]$

Beweis klar

(3.16) Satz (Taylorentwicklung des Flusses)

Sei $f \in C^{p+1}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ dann gilt für den Fluss von $\dot{y} = f(y)$

$$\underbrace{\Phi^h(y) = y + \sum_{|\beta| \leq p} \frac{h^{|\beta|}}{\beta!} \alpha_\beta \, F(\beta)(y) + \mathcal{O}(\underline{h^{p+1}})}_{=g}$$

wobei für $\beta = [\beta_1 \dots \beta_m]$

$\beta! := |\beta| \underbrace{\prod_{j=1}^{m} \beta_j!}$ $\qquad \alpha_\beta = \frac{\delta_\beta}{m!} \alpha_{\beta_1} \cdots \alpha_{\beta_m}$

$\bullet! = 1$ $\qquad \alpha_\bullet = 1$

δ_β = Anzahl der Möglichkeiten einem ungeordneten Tupel $[\beta_1 \dots \beta_m]$ ein geordnetes Tupel $(\beta_1, \dots \beta_m)$

$\Phi^h(y_0) = y(h)$

wobei

$y(h)$ Lösung von

$\begin{cases} \dot{y} = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

$\Phi^h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

Beweis Induktion über p

IA $p = 0$ ✓ $\left(p = 1 \quad \Phi^h(y) = y + \underbrace{\dot{y} \cdot h}_{f(y)\cdot h} + \mathcal{O}(h^2) \right)$

IS $p \rightsquigarrow p+1$

Es ist $f(\Phi^h(y)) = f(y + g)$

$$= \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!} f^{(n)}(y)\underbrace{(g \dots g)}_{n \text{ Argumente}} + \mathcal{O}(\|g\|^{p+1})$$

$$= \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!} f^{(n)}(y) \Big(\sum_{|\beta_1| \leq p} \frac{h^{|\beta_1|}}{\beta_1!} \alpha_{\beta_1} \mathcal{F}(\beta_1)(y) + \mathcal{O}(h^{p+1}), \dots, \sum_{|\beta_n| \leq p} \frac{h^{|\beta_n|}}{\beta_n!} \alpha_{\beta_n} \mathcal{F}(\beta_n)(y) + \mathcal{O}(h^{p+1}) \Big) + \mathcal{O}(\|g\|^{p+1})$$

$$\underset{\text{Linearität von } f^{(n)}}{=} \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!} \sum_{\sum_{j=1}^{n} |\beta_j| \leq p} \frac{h^{|\beta_1| + |\beta_2| + \dots |\beta_n|}}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_n!} \alpha_{\beta_1} \dots \alpha_{\beta_n} f^{(n)}(\mathcal{F}(\beta_1), \dots \mathcal{F}(\beta_n))(y) + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

$$= \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{|\beta| \leq p+1 \\ \beta = [\beta_1 \dots \beta_n]}} |\beta| \frac{h^{|\beta|-1}}{\beta!} S_\beta \alpha_{\beta_1} \dots \alpha_{\beta_n} \mathcal{F}(\beta)(y) + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

$$= \sum_{n=0}^{p} \sum_{|\beta| \leq p+1} \frac{|\beta| h^{|\beta|-1}}{\beta!} \underbrace{\frac{S_\beta}{n!} \alpha_{\beta_1} \dots \alpha_{\beta_n}}_{\alpha_\beta} \mathcal{F}(\beta)(y) + \mathcal{O}(h^{p+1}) \qquad \boxed{4}$$

Für den Fluss gilt $\Phi^h(y) = y + \int_0^h f(\Phi^\tau(y)) \, d\tau$

$$\Rightarrow \Phi^h(y) = y + \sum_{|\beta| \leq p+1} \frac{h^{|\beta|}}{\beta!} \alpha_\beta \mathcal{F}(\beta)(y) + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

□