(3.8) Definition

Ein Runge-Kutta Verfahren heißt konsistent, falls $\lim_{h\to 0} \frac{\Psi^{t_0,t_0+h}(y_0)-y(t_0+h)}{h} = 0$.

(3.9) Satz

Sei $I = [t_0, T]$ ein Intervall und $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar und (global) Lipschitz-stetig in der zweiten Komponente, d.h. es existiert ein L mit

$$||f(t,y) - f(t,z)|| \le L||y-z|| \qquad \forall y,z \in \mathbb{R}^d, \quad \forall t \in I, \tag{2}$$

so gilt für $n \in \mathbb{N}$ mit $\underbrace{t_0 + nh}_{t_n} \in I$ und die durch das Eulerverfahrne definierte Folge $(y_n)_n$, dass

$$\|y_n - \underbrace{y(t_0+nh)}_{y(t_n)}\| \le Mh,$$

mit

$$M = \frac{e^{L(T-t_0)}-1}{L}\frac{1}{2}\max_{t\in I}\|\ddot{y}(t)\|.$$

(3.8) Definition

Ein Runge-Kutta Verfahren heißt konsistent, falls $\lim_{h\to 0} \frac{\Psi^{t_0,t_0+h}(y_0)-y(t_0+h)}{h} = 0$.

(3.9) Satz

Sei $I = [t_0, T]$ ein Intervall und $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar und (global) Lipschitz-stetig in der zweiten Komponente, d.h. es existiert ein L mit

$$||f(t,y) - f(t,z)|| \le L||y-z|| \qquad \forall y,z \in \mathbb{R}^d, \quad \forall t \in I, \tag{2}$$

so gilt für $n \in \mathbb{N}$ mit $t_0 + nh \in I$ und die durch das Eulerverfahrne definierte Folge $(y_n)_n$, dass

$$\|y_n - y(t_0+nh)\| \le Mh,$$

mit

$$M = \frac{e^{L(T-t_0)}-1}{L}\underbrace{\frac{1}{2}\max_{t\in I}\|\ddot{y}(t)\|}_{c}.$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{h\to 0}\max_{n:t_n\in I}\|y_n - y(t_n)\| = 0,$$

Beweis von Satz (3.9)

in 3 Schritten

1. Abschätzung für den lokalen Fehler
2. Fehlerfortpflanzung
3. Fehlerakkumulation

Vorüberlegung: y ist C^2, denn

$$\ddot{y}(t) = \frac{d}{dt}\left(f(t,y(t))\right) = D_y f \cdot \dot{y}(t) + \partial/\partial t\, f(t,y)$$

$$= \underline{D_y f} \cdot f(t,y) + \underline{\partial/\partial t\, f(t,y)}$$

1) lokaler Fehler

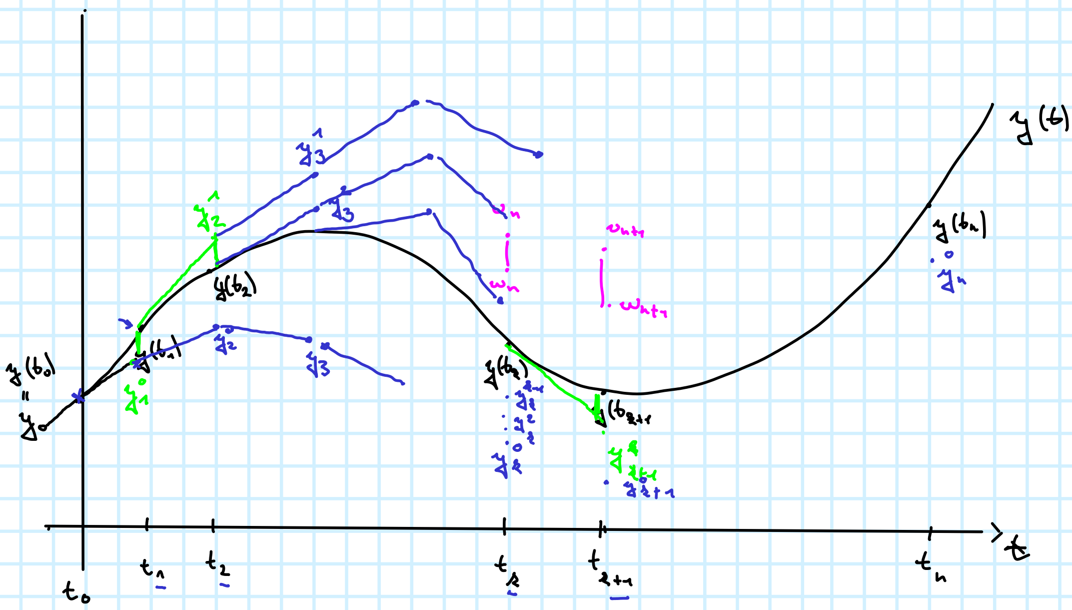
$$\| y^k_{k+1} - y(t_{k+1}) \| = h^2 \left\| \int_0^1 (1-\theta)\, \ddot{y}(t_k + \theta h)\, d\theta \right\|$$

$$\leq h^2 \max_{t \in [t_k, t_{k+1}]} \| \ddot{y}(t) \| \, \tfrac{1}{2}$$

$$\leq h^2 \, \tfrac{1}{2} \max_{t \in I} \| \ddot{y}(t) \|$$

wobei $y^n_{n+1} := \underbrace{y(t_n)}_{} + h f(t_n, y(t_n))$

Ergebnis nach einem Schritt des Eulerverfahrens ausgehend von der exakten Lösung



lokaler Fehler

Sei y_j^k die Näherung an $y(t_j)$ mit Anfangswert $y(t_k)$

2) Fehlerfortpflanzung

Startend mit Anfangswerten v_n und w_n erhält man

$$v_{n+1} = v_n + h f(t_n, v_n)$$
$$w_{n+1} = w_n + h f(t_n, w_n)$$

$$\Rightarrow \| v_{n+1} - w_{n+1} \| \leq \| v_n - w_n \| + h \underbrace{\| f(t_n, v_n) - f(t_n, w_n) \|}_{\leq L \| v_n - w_n \|}$$
$$\leq (1 + hL) \| v_n - w_n \|$$

3) Fehlerakkumulation

Sei y_j^k die Näherung an $y(t_j)$ mit Anfangswert $y(t_k)$ $(j \geq k)$. y_j^k ist die $(j-k)$-te Iteration des Eulerverfahrens zum AWP
$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_k) \leftarrow \text{Bekannt} \end{cases}$$
Es ist $y_n^0 = y_n$, $y_n^n = y(t_n)$

Wegen 1) gilt
$$\| y_{k+1}^k - y_{k+1}^{k+1} \| \leq Ch^2 \quad \text{mit } C = \frac{1}{2} \max_{t \in I} \| \ddot{y}(t) \|$$

und wegen 2)
$$\underbrace{\| y_n^k - y_n^{k+1} \|} \leq (1 + hL) \underbrace{\| y_{n-1}^k - y_{n-1}^{k+1} \|}$$
$$\leq \ldots$$
$$\leq \underbrace{(1 + hL)^{n-k-1} \| y_{k+1}^k - y_{k+1}^{k+1} \|}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} q^j$$

Weiter gilt
$$\| y_n - y(t_n) \| = \| y_n^0 - y_n^n \|$$
$$\leq \| y_n^0 - y_n^1 \| + \| y_n^1 - y_n^2 \| + \ldots \| y_n^{n-1} - y_n^n \|$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} \| y_n^j - y_n^{j+1} \| \leq Ch^2 \left((1 + hL)^{n-1} + \ldots + (1 + hL) + 1 \right)$$

$$= Ch^2 \frac{(1+hL)^n - 1}{(1+hL) - 1} \leq Ch \frac{1}{L} \left(e^{nhL} - 1 \right)$$

$$\leq Ch \frac{1}{L} \left(e^{(T-t_0)L} - 1 \right) \qquad \text{da} \quad t_0 + nh \in \underline{I} = [t_0, T]$$

$\square$

(3.10) Satz

Sei $f: \underline{I} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ p-mal stetig differenzierbar und in der zweiten Komponente (global) Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante L und y die Lösung von

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0, T) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Falls für ein Verfahren $y_{n+1} = y_n + h_n \underline{\Phi}(t_n, y_n, h_n)$

i) der lokale Fehler für $t \in [t_0, T]$ und $h \leq h_{max}$

$$\| y(t+h) - \left(y(t) + h \underline{\Phi}(t, y(t), h) \right) \| \leq C h^{p+1}$$

erfüllt

ii) die $\underline{\Phi}(t, y, h)$ eine Lipschitzbedingung für $0 < h < h_{max}$ in y in einer Umgebung der Lösung erfüllt, d.h

$$\| \underline{\Phi}(t, y, h) - \underline{\Phi}(t, z, h) \| \leq \Lambda \| y - z \| \qquad (\#)$$

$\forall\ h \in (0, h_{max})$ $t \in [t_0, T]$

iii) falls h_{max} klein genug ist.

dann gilt für $\underset{\sim}{h} = \max_n h_n$

$$\| y(t_n) - y_n \| \leq h^p \frac{C}{\Lambda} \left(e^{L(t_n - t_0)} - 1 \right)$$

Beweis analog zu (3.9) $\rightsquigarrow$ später

(3.11) Lemma

Falls $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ Lipschitzstetig in der zweiten Komponente mit Lipschitzkonstante L in einer Umgebung der Lösung von $y' = f(t,y)$ ist, dann erfüllt ein explizites RKV die Bedingung (#) in (3.10) mit

$$\Lambda = L \Big(\sum_{i=1}^{s} |b_i| + h_{max} L \sum_{i,j=1}^{s} |b_i a_{ij}| + (h_{max} L)^2 \sum_{i,j,k=1}^{s} |b_i a_{ij} a_{jk}| + \dots \Big)$$

s - Summanden

Beweis $\Phi(t,y,h) = \sum_{j=1}^{s} b_j \dot{Y}_j(y)$

mit $\dot{Y}_j(y) = f\left(t + c_j h,\ y + \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} \dot{Y}_k(y)\right) \qquad j = 1..s$

$$\| \dot{Y}_1(y) - \dot{Y}_1(z) \| \le L \| y - z \|$$

$$\| \dot{Y}_2(y) - \dot{Y}_2(z) \| \le L \| y - z + h a_{21} (\dot{Y}_1(y) - \dot{Y}_1(z)) \|$$

$$\le L (1 + h |a_{21}| L) \| y - z \|$$

$$\| \dot{Y}_3(y) - \dot{Y}_3(z) \| \le L \| y - z + h \sum_{k=1}^{2} a_{3k} (\dot{Y}_k(y) - \dot{Y}_k(z)) \|$$

$$\le L (1 + h|a_{31}|L + h|a_{32}|L (1 + h|a_{21}|L)) \| y - z \|$$

$$= L (1 + \underbrace{hL|a_{31}| + hL|a_{32}|}_{hL \sum_{k=1}^{2} |a_{3k}|} + (hL)^2 |a_{32}||a_{21}|) \| y - z \|$$

induktiv $\| \dot{Y}_j(y) - \dot{Y}_j(z) \| \le L \Big(1 + hL \sum_{k=1}^{s} |a_{jk}| + (hL)^2 \sum_{k,i} |a_{jk} a_{ki}|$

$$+ \dots (hL)^{j-1} \sum_{\underbrace{k,i,\dots,m,l}_{j-1 \text{ Indizes}}} | a_{jk} a_{ki} \cdots a_{ml} | \Big) \| y - z \|$$

Da $\| \Phi(t,y,h) - \Phi(t,z,h) \|$

$$\le \sum_{j=1}^{s} |b_j| \, \| \dot{Y}_j(y) - \dot{Y}_j(z) \|$$

liefert Einsetzen die Behauptung $\square$