(5.18) Existenz von Runge-Kutta Lösungen

1. Idee Verwende den Banachschen Fixpunktsatz BFS

$y = F(y)$

Problem: Dafür muss hL klein genug sein.

Da hier L groß ist ist der BFS hier ungeeignet

$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_s \end{bmatrix}$

$f_i = y_0 + \underbrace{h \sum_{j=1} a_{ij} f(t, Y_j)}$

Definition 1

Sei $\langle u, v \rangle_D = u^T D v$ für $u, v \in \mathbb{R}^s$

und $D = \operatorname{diag}(d_1 \dots d_s)$ $d_j > 0$ für $j = 1..s$

$\alpha_D(\mathfrak{A}^{-1})$ ist die größte Zahl so, dass

$$\langle u, \mathfrak{A}^{-1} u \rangle_D \geq \alpha_D(\mathfrak{A}^{-1}) \langle u, u \rangle_D \quad \forall u \in \mathbb{R}^s$$

und

$$\alpha_0(\mathfrak{A}^{-1}) = \sup_{\substack{D > 0 \\ D \text{ diagonal}}} \alpha_D(\mathfrak{A})$$

$D > 0 \leftarrow D$ positiv definit

Satz 2 Sei $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ stetig diffbar und erfülle

$$\langle f(t, y) - f(t, z), y - z \rangle \leq \nu \| y - z \|^2$$

Falls die Runge-Kutta Matrix $\mathfrak{A}$ invertierbar ist und

$h\nu < \alpha_0(\mathfrak{A}^{-1})$ ist, so besitzt

$$(*) \qquad Y_i = y_0 + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(t_0 + c_j h, Y_j) \qquad i = 1..s$$

eine Lösung

Beweis

Homotopieverfahren

Für $\tau \in [0, 1]$

$$Y_i(\tau) := y_0 + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(t_0 + c_j h, Y_j(\tau))$$

$$\rightarrow \quad + h(\tau - 1) \sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(t_0 + c_j h, y_0) \qquad i = 1..s$$

Für $\tau = 0$ ist $Y_i(0) = y_0$ eine Lösung, denn

$$Y_i(0) = y_0 + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(t_0 + c_j h, Y_j(0)) - h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(t_0 + c_j h, y_0)$$

Für $\tau = 1$ ist $Y_i(1)$ falls $Y_i(1)$ existiert eine Lösung von $(*)$

Differentiation nach τ liefert

$$\frac{d}{d\tau} Y_i(\tau) = \underbrace{h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \frac{\partial}{\partial y} f(t_0 + c_j h, Y_j(\tau)) \frac{d}{d\tau} Y_j(\tau)}_{} + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(t_0 + c_j h, y_0)$$

Für

$$y(\tau) = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_s \end{bmatrix}, \quad F_y(y) = \text{blockdiag}\left(\partial/\partial y \, f(t_0 + c_1 h, Y_1(\tau)), \ldots, \partial/\partial y \, f(t_0 + c_s h, Y_s(\tau))\right)$$

und

$$f_0 := \begin{bmatrix} f(t_0 + c_1 h, y_0) \\ \vdots \\ f(t_0 + c_s h, y_0) \end{bmatrix}$$

ist das äquivalent zu

$$\left[I_{s \cdot d} - h(\mathcal{A} \otimes I_d) F_y(y) \right] \dot{y} = h(\mathcal{A} \otimes I_d) f_0 \qquad (**)$$

Zeige: $\dot{y} = \underline{\mathcal{F}}(y)$ für eine beschränkte und glatte Funktion $\mathcal{F}$. Dann existiert $y(1)$

Wähle D so, dass $h\nu \leq \kappa_D(\mathcal{A}^{-1})$ und multipliziere $(**)$ mit

$$\dot{y}^T (D\mathcal{A}^{-1} \otimes I_d)$$

$$\dot{y}^T (D\underline{\mathcal{A}^{-1} \otimes} I) \dot{y} - \dot{y}^T (D \otimes I) F_{\underline{y}}(y) \dot{y} = \dot{y}^T h(D \underline{\otimes} I) f_0$$

Die drei Terme lassen sich wie folgt abschätzen

i) $\dot{y}^T (D\mathcal{A}^{-1} \otimes I)\dot{y} \geq \kappa_D \underline{(\mathcal{A}^{-1})} \|\dot{y}\|_D^2$

ii) Für $y = z + \varepsilon u$ gilt nach Voraussetzung

$$\langle \underline{\varepsilon}\, \partial/\partial y \, f(t,z) u + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \underline{\varepsilon} u \rangle \leq \nu \underline{\varepsilon}^2 \|u\|^2$$

Dividiert man durch ε^2 und betrachtet $\varepsilon \to 0$ so erhält man

$$\langle \partial/\partial y \, f(t,z) u, u \rangle \leq \nu \|u\|^2 \qquad \langle u, \partial/\partial y \, f(t,z) u \rangle \leq \nu \|u\|^2$$

Damit ist

$$\dot{y}^T (D \otimes I) F_y(y) \dot{y} \leq \nu \|\dot{y}\|_D^2$$

iii) Nach der Cauchy Schwarzschen Ungl

$$h \dot{y}^T (D \otimes I) f_0 \leq h \|\dot{y}\|_D \|f_0\|_D$$

~~Da~~

Damit ist $\quad \alpha_D(\mathcal{O}^{-1}) \, \| \dot{y} \|_D^{\cancel{2}} - h\nu \, \| \dot{y} \|_D^{\cancel{2}} \quad \leq \quad h \, \| \cancel{\dot{y}} \|_D \, \| f_0 \|_D$

$\Rightarrow \quad \| \dot{y} \|_D^2 = \| \mathcal{F}(y) \|^2 \leq \dfrac{h \, \| f_0 \|_D}{\alpha_D(\mathcal{O}^{-1}) - h\nu} \quad \Leftarrow \quad \alpha_D(\mathcal{O}) > h\nu$

Das AWP
$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \, y(\tau) = \mathcal{F}(y(\tau)) \\ y(0) = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

besitzt für alle τ eine Lösung $\square$