(5.17) Konvergenz bei kontraktiven Differentialgleichungen

$\| y_n - y(t_n) \| \le e^{L(T-t_0)} \cdots$ Steigung

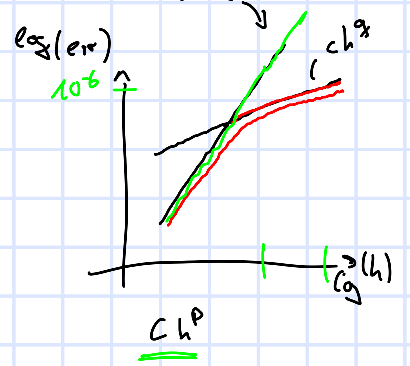
Allgemeine Voraussetzungen

$\dot{y} = f(t, y)$ für $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ stetig diffbar

mit

$\langle f(t,y) - f(t,z), y - z \rangle \le 0 \quad \forall\, y, z \in \mathbb{R}^d$

($\ell = 0$. Alle Resultate gelten auch für $\ell < 0$)



__Ziel__ "globale Fehlerabschätzung"

$\| y_n - y(t_n) \| < c h^q$ für $t_n \in [t_0, T]$

für $h < h_0$ mit Konstanten c und h_0 unabhängig von L der Lipschitzkonstante von f bzgl y

Im Allgemeinen wird $q \le p$ gelten, d.h. die Ordnung reduziert sich

__Bemerkung__

In (5.13) haben wir gezeigt, dass beim impliziten Eulerverfahren $p = q = 1$ ist

__Definition 1__

Die Stufenordnung q eines RKVs ist die größte natürliche Zahl für die

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_j^{k-1} = \frac{1}{k} c_i^k \qquad k = 1..q \qquad i = 1..s$$

$\left(a_{ij} \text{ Gewichte für QF } \int_0^{c_i} f \, dt = \sum a_{ij} f(c_j) \right)$

__Bemerkung__ Nach Konstruktion ist bei Kollokationsverfahren $q \ge s$

Satz 2

Für ein algebraisch stabiles RKV der Ordnung p mit Stufenordnung $q \leq p$ das folgende Bedingungen erfüllt

i) $\mathfrak{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{s}$ ist invertierbar

ii) $\exists \; D = \operatorname{diag}(d_1 \ldots d_s) \quad d_j > 0$ und $\kappa > 0$ so, dass

$$\langle D\mathfrak{A}^{-1} x, x \rangle \geq \kappa \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^s$$

gilt für den lokalen Fehler

$$\| y_1 - y(t_1) \| < c\, h^{q+1}$$

für ein c unabhängig von f (wobei f die allg. Voraussetzung $\langle f(t,y) - f(t,z), y-z \rangle \leq 0$)

Bemerkung

ii) ist genau dann erfüllt, wenn der symmetrische Anteil von $D\mathfrak{A}^{-1}$ positiv definit ist, d.h. κ ist eine untere Schranke für die Eigenwerte von

$$\tfrac{1}{2}\left(D\mathfrak{A}^{-1} + (D\mathfrak{A}^{-1})^T \right) \leftarrow$$

$\uparrow$ symmetrische Anteil von $D\mathfrak{A}^{-1}$

$$\tfrac{1}{2}\left(D\mathfrak{A}^{-1} - (D\mathfrak{A}^{-1})^T \right) \leftarrow \text{antisymmetrischer Anteil von } D\mathfrak{A}^{-1}$$

Beweis

$$\tilde{Y}_i := y(t_0 + c_i h) \qquad \dot{\tilde{Y}}_i := \dot{y}(t_0 + c_i h) \left(= f(t_0 + c_i h, y(t_0 + c_i h)) \right)$$

Dann ist

$$\tilde{Y}_i = y_0 + \int_{t_0}^{t_0 + c_i h} \dot{y}(\tau)\, d\tau$$

$$= y_0 + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \dot{\tilde{Y}}_j + \delta_i \quad \leftarrow$$

für Quadraturfehler δ_i mit $\|\delta_i\| \in \mathcal{O}(h^{q+1})$

$y(t_0 + h) = y_0 + h \sum b_i \dot{\tilde{Y}}_i + \hat{\delta}$ für Quadraturfehler $\|\hat{\delta}\| \in \mathcal{O}(h^{p+1})$

Andererseits

$$Y_i = y_0 + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \dot{Y}_j \qquad \leftarrow \quad y_1 = y_0 + h \sum b_i \dot{Y}_i$$

Für $\Delta Y_i := Y_i - \tilde{Y}_i \qquad \Delta \dot{Y}_i = \dot{Y}_i - \dot{\tilde{Y}}_i = f(t_0 + c_i h, Y_i) - f(t_0 + c_i h, \tilde{Y}_i)$

$$\Delta y := \begin{bmatrix} \Delta Y_1 \\ \vdots \\ \Delta Y_s \end{bmatrix} \qquad \Delta \dot{y} := \begin{bmatrix} \Delta \dot{Y}_1 \\ \vdots \\ \Delta \dot{Y}_s \end{bmatrix} \qquad \delta := \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_s \end{bmatrix}$$

gilt $\quad \Delta y = h(\mathfrak{A} \otimes I_d)\, \Delta \dot{y} - \delta$

Da $\mathcal{O}$ invertierbar ist, gilt

$$h \, \Delta \dot{y} = (\mathcal{O}^{-1} \otimes I_d)(\Delta y + \delta) \quad \leftarrow$$

Multiplikation mit $\Delta y^T (D \otimes I_d)$ von links liefert

$$h \sum_{i=1}^{s} d_i \underbrace{\langle \Delta y_i, \Delta \dot{y}_i \rangle}_{0 \geq} = \underbrace{\Delta y^T (D\mathcal{O}^{-1} \otimes I_d) \Delta y}_{\geq \alpha \langle \Delta y, \Delta y \rangle} + \Delta y^T D\mathcal{O}^{-1} \otimes I_d \, \delta$$

$\Rightarrow \quad 0 \geq \alpha \| \Delta y \|^2 + \Delta y^T D\mathcal{O}^{-1} \otimes I_d \, \delta$

$\Rightarrow \quad | \Delta y^T D \mathcal{O}^{-1} \otimes I_d \, \delta | \geq \alpha \| \Delta y \|^2$

$\Rightarrow$ CSU $\quad \| \Delta y \| \leq \frac{\| D\mathcal{O}^{-1} \|}{\alpha} \underbrace{\| \delta \|}_{\in \mathcal{O}(h^{q+1})}$

Analog schätzt man den lokalen Fehler $y(t_0 + h) - y_1$ ab

$$\| y_1 - y(t_0 + h) \| \leq h \left\| \sum_{i=1}^{s} b_i \Delta \dot{Y}_i \right\| + \mathcal{O}(h^{p+1})$$
$$\leq h \sum_{i=1}^{s} |b_i| \, \| \Delta \dot{Y}_i \| + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

$$\leq h \max_i |b_i| \, \| \Delta \dot{y} \| + \mathcal{O}(h^{p+1})$$
$$= c \, \| \mathcal{O}^{-1} \otimes I \, (\underbrace{\Delta y}_{\| \Delta y \| \leq \frac{\| D\mathcal{O}^{-1} \|}{\alpha} \underbrace{\| \delta \|}_{\in \mathcal{O}(h^{q+1})}} + \delta) \| + \mathcal{O}(h^{p+1})$$
$$= \mathcal{O}(h^{q+1}) \quad \text{da} \quad p \geq q$$

$\square$

<u>Satz 3</u> Unter den Voraussetzungen von Satz 2 ist das RKV konvergent der Ordnung q, d.h.

$$\| y_n - y(t_n) \| < c h^q \qquad \text{für } t_n \in [t_0, T]$$

für ein c unabhängig von der Lipschitzkonstante L von f

<u>Beweis</u> Folgt direkt aus der Kontraktivität des RKVs und anschließenden Aufsummieren

$\square$

Satz 4 Für Gauß-Kollokationsverfahren sind die Voraussetzungen von Satz 2 mit $D = B(C^{-1} - I_s)$ erfüllt.
Hierbei ist $B = \mathrm{diag}(b_1 .. b_s)$ und $C = \mathrm{diag}(c_1 .. c_s)$

Beweis i) $\mathfrak{A}$ invertierbar (wurde in (5.16) gezeigt) ← Lücke in Beweis

ii) Wir zeigen:

$\rightarrow \quad D\mathfrak{A}^{-1} + (D\mathfrak{A}^{-1})^T = \underline{BC^{-2}}$ (Nmoit I $c_i \in (0,1)$ $c_i \neq 0$ $b_i > 0$ für $i = 1..s$)

Dann ist wegen $c_j > 0$ $b_j > 0$ $j = 1..s$

BC^{-2} eine Diagonalmatrix mit positiven Einträgen

Für die Vandermonde Matrix $V = (c_j^{i-1})_{i,j=1}^{s}$ ist

$$\left[V^T \left(\mathfrak{A}^T \underbrace{D\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}}_{I} + \underbrace{\mathfrak{A}^T\mathfrak{A}^{-T}}_{I} D\mathfrak{A} - \mathfrak{A}^T \underline{BC^{-2}} \mathfrak{A} \right) V = 0 \right]$$

den für den l,m-ten Eintrag gilt

$$\sum_{i,j=1}^{s} c_i^{l-1} a_{ji} \underbrace{b_j (c_j^{-1} - 1)}_{= d_j} c_j^{m-1}$$

$$\rightarrow \quad + \sum_{i,j=1}^{s} c_i^{l-1} \underbrace{b_i (c_i^{-1} - 1)}_{d_i} a_{ij} c_j^{m-1}$$

$$- \sum_{i,j,k=1}^{s} c_i^{l-1} a_{ji} b_j c_j^{-2} a_{jk} c_k^{m-1}$$

$$= \sum_{j=1}^{s} b_j (c_j^{-1} - 1) c_j^{m-1} \underbrace{\sum_{i=1}^{s} c_i^{l-1} a_{ji}}_{= c_j^l / l}$$

$$\rightarrow \quad + \sum_{i=1}^{s} b_i (c_i^{-1} - 1) c_i^{l-1} \underbrace{\sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_j^{m-1}}_{c_i^m / m}$$

$$\left[- \sum_{j=1}^{s} b_j c_j^{-2} \underbrace{\sum_{i=1}^{s} a_{ji} c_i^{l-1}}_{c_j^l / l} \underbrace{\sum_{k=1}^{s} a_{jk} c_k^{m-1}}_{c_j^m / m} \right] = 0$$

$$= \frac{1}{\ell} \sum_{j=1}^{s} \underline{b_j} \, c_j^{m-1+\ell-1} - \frac{1}{\ell} \sum_{j=1}^{s} b_j c_j^{m-1+\ell}$$

$$+ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{s} b_j \, c_j^{m-1+\ell-1} - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{s} b_j c_j^{\ell-1+m}$$

$$\Big[- \frac{1}{m\ell} \sum_{j=1}^{s} b_j \, c_j^{m-1+\ell-1}$$

$$= \frac{1}{\ell} \frac{1}{m+\ell-1} - \frac{1}{\ell} \frac{1}{m+\ell} + \frac{1}{m} \frac{1}{m+\ell-1} - \frac{1}{m} \frac{1}{m+\ell} - \frac{1}{m\ell} \cdot \frac{1}{m+\ell-1}$$

$$= \left(\frac{1}{\ell} + \frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{m+\ell-1} - \frac{1}{m+\ell}\right) - \frac{1}{m\ell(m+\ell-1)} = \frac{\cancel{(m+\ell)}\,(m+\ell-(m+\ell-1))}{m\ell\,(m+\ell-1)\cancel{(m+\ell)}} - \frac{1}{m\ell(m+\ell-1)} = 0$$

$\square$

Satz 5

Für Radauverfahren sind die Voraussetzungen von Satz 2 mit $D = BC^{-1}$ erfüllt

Beweis Analog zu Satz 4 zeigt man das

$$D\mathcal{A}^{-1} + (D\mathcal{A}^{-1})^T = BC^{-2} + e_s e_s^T \qquad e_s = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lemma Die Gewichte eines s-stufigen QF der Ordnung $p \geq 2s-1$ sind positiv

Beweis Seien $\ell_j(x)$ Lagrangepolynome zu $c_1 \ldots c_s$ $\quad \ell_j \in \mathcal{P}_s$

Dann $$b_i \underset{\substack{\uparrow \\ \ell_i(c_j) = \delta_{ij}}}{=} \sum_{j=1}^{s} b_j \, \ell_i^2(c_j) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ordnung der QF } 2s-1}}{=} \int_0^1 \ell_i^2(x)\,dx > 0$$

$\square$