Ausgehend von v_n und w_n ergibt sich nach einem Schritt des Verfahrens

$$v_{n+1} = v_n + h f(t_{n+1}, v_{n+1})$$
$$w_{n+1} = w_n + h f(t_{n+1}, w_{n+1}) \qquad t_{n+1} = t_n + h$$

$$\| v_{n+1} - w_{n+1} \|^{\cancel{2}} = \langle v_n + h f(t_{n+1}, v_{n+1}) - w_n + h f(t_{n+1}, w_{n+1}), v_{n+1} - w_{n+1} \rangle$$
$$= \langle v_n - w_n, v_{n+1} - w_{n+1} \rangle + h \langle f(t_{n+1}, v_{n+1}) - f(t_{n+1}, w_{n+1}), v_{n+1} - w_{n+1} \rangle$$
$$\leq \| v_n - w_n \| \, \cancel{\| v_{n+1} - w_{n+1} \|} + h\ell \| v_{n+1} - w_{n+1} \|^{\cancel{2}}$$
$$\Rightarrow \| v_{n+1} - w_{n+1} \| \leq \frac{1}{1-h\ell} \| v_n - w_n \|$$

iii) Fehlerakkumulation

- induktiv zeigt man $\| y_n - y(t_n) \| \leq C h^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1-h\ell)^j}$ ←

$\ulcorner$ $n = 1$ in i) bereits gezeigt (∗)

Ist z_{n+1} Lösung nach einem Schritt ausgehend von $y(t_n)$ so gilt

$$\| y(t_{n+1}) - y_{n+1} \| \leq \| y(t_{n+1}) - z_{n+1} \| + \| z_{n+1} - y_{n+1} \|$$

$$\leq \frac{Ch^2}{1-h\ell} + \frac{1}{1-h\ell} \| y(t_n) - y_n \|$$
$$= Ch^2 \frac{1}{1-h\ell} \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1-h\ell)^j} \right)$$
$$= Ch^2 \frac{1}{1-h\ell} \sum_{j=0}^{n} 1/(1-h\ell)^j \quad \lrcorner$$

$$\left(1 + x \leq e^x \right)$$

Da $\frac{1}{1-h\ell} = 1 + \frac{h\ell}{1-h\ell} \leq e^{h\ell/1-h\ell}$ folgt

$$\| y(t_{n+1}) - y_{n+1} \| \leq \frac{1/(1-h\ell)^n - 1}{1/1-h\ell \; - 1} Ch^2 \frac{1}{1-h\ell} \qquad \left(\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$$
$$= Ch^2 \frac{\left(\frac{1}{1-h\ell}\right)^n - 1}{h\ell}$$
$$\leq \frac{Ch}{\ell} \left(e^{nh\ell/1-h\ell} - 1 \right) = mh \quad \text{da } nh \leq T - t_0$$

□

Bemerkungen

a) Für $h\ell \leq \alpha < 1$ ist m unabhängig von h beschränkt

In jedem Fall ist m unabhängig von der Lipschitzkonstante L.

b) (ohne Beweis) Für $h\ell < 1$ besitzt

$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_{n+1}, y_{n+1})$ eine eindeutige Lösung

(5.15) Algebraisch stabile RKV

$\dot{y} = f(t, y)$ $\quad f : [t_0, T] \times \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ $\quad f$ stetig diffbar

und erfülle für zwei Lösungen y und z

(D) $\quad \mathrm{Re} \langle f(t, y) - f(t, z), y - z \rangle \leq 0 \quad \forall\, t \in [t_0, T] \quad y, z \in \mathbb{C}^d$

Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \| y - z \|^2 = \langle \dot{y} - \dot{z}, y - z \rangle + \langle y - z, \dot{y} - \dot{z} \rangle$$

$$= 2\mathrm{Re} \langle f(t, y) - f(t, z), y - z \rangle \leq 0$$

Definition 1 i) Die Differentialgleichung $\dot{y} = f(t,y)$ heißt kontraktiv, falls

$$\| y(t) - z(t) \| \leq \| y(t_0) - z(t_0) \| \quad \text{für } t \geq t_0$$

ii) Ein RKV heißt kontraktiv, falls für jede DGL, die (D) erfüllt, für jede Schrittweite $h > 0$

$$\| y_1 - z_1 \| \leq \| y_0 - z_0 \|$$

wobei y_1 und z_1 numerische Lösungen (ein Schritt des RKV) zu Anfangswerten y_0 bzw z_0 sind

Beispiele

- Differentialgleichungen, die (D) erfüllen, sind kontraktiv
- Das implizite Eulerverfahren ist kontraktiv $\boxed{\text{ÜA}}$

Lemma 2 Ein kontraktives RKV ist A-stabil

Beweis Betrachte $f(t,y) = \lambda y$ für $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$

damit ist (D) erfüllt $\qquad \operatorname{Re} \langle \lambda y - \lambda z, y - z \rangle \leq 0$

$y_1 = R(h\lambda)\, y_0 \qquad z_1 = R(h\lambda)\, z_0$

für die Stabilitätsfunktion $R(h\lambda)$ des RKVs

Kontraktivität $\Rightarrow \| y_1 - z_1 \| \leq \| y_0 - z_0 \|$

$\Rightarrow |R(h\lambda)| \leq 1$

$\Rightarrow |R(z)| \leq 1 \quad \forall \operatorname{Re}(z) \leq 0$

$\Rightarrow$ RKV ist A-stabil $\square$

Definition 3

Ein RKV heißt algebraisch stabil, falls

i) $b_j \geq 0$ für $j = 1..s$

ii) $M = (m_{ij})_{i,j=1}^{s}$ mit $m_{ij} = b_i a_{ij} + b_j a_{ji} - b_i b_j$ positiv semidefinit ist

Beispiele a) Gauß- und Radauverfahren sind algebraisch stabil für alle s (ohne Beweis) $\leftarrow$

b) Die Trapezregel ist A-stabil aber nicht algebraisch stabil

Satz 4 Jedes algebraisch stabile RKV ist kontraktiv (und damit A-stabil)

Beweis

Betrachte RKVen zu Startwerten y_0 und z_0

$$Y_i = y_0 + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \dot{Y}_j \qquad Z_i = z_0 + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \dot{Z}_j$$

$$\dot{Y}_j = f(t_0 + c_j h, Y_j) \qquad \dot{Z}_j = f(t_0 + c_j h, Z_j)$$

$$y_1 = y_0 + h \sum_{j=1}^{s} b_j \dot{Y}_j \qquad z_1 = z_0 + h \sum_{j=1}^{s} b_j \dot{Z}_j$$

$$\Delta y_0 = y_0 - z_0 \qquad \Delta y_1 = y_1 - z_1$$

$$\Delta Y_i = Y_i - Z_i \qquad \Delta \dot{Y}_i = \dot{Y}_i - \dot{Z}_i$$

$$\rightarrow \quad \Delta Y_i = \Delta y_0 + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \Delta \dot{Y}_j$$

$$\Delta y_1 = \Delta y_0 + h \sum_{j=1}^{s} b_j \Delta \dot{Y}_j \qquad \Delta \dot{Y}_i = f(t_0 + c_i h, Y_i) - f(t_0 + c_i h, Z_i)$$

$$\|\Delta y_1\|^2 = \langle \Delta y_0 + h \sum_{i=1}^{s} b_i \Delta \dot{Y}_i , \Delta y_0 + h \sum_{j=1}^{s} b_j \Delta \dot{Y}_j \rangle$$

$$= \|\Delta y_0\|^2 + 2h \operatorname{Re} \langle \Delta y_0, \sum_{j=1}^{s} b_j \Delta \dot{Y}_j \rangle + h^2 \sum_{i,j=1}^{s} b_i b_j \langle \Delta \dot{Y}_i , \Delta \dot{Y}_j \rangle$$

$$= \|\Delta y_0\|^2 + 2h \operatorname{Re} \langle \Delta Y_i - h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \Delta \dot{Y}_j , \sum_{i=1}^{s} b_i \Delta \dot{Y}_i \rangle + h^2 \sum_{i,j=1}^{s} b_i b_j \langle \Delta \dot{Y}_i , \Delta \dot{Y}_j \rangle$$

$$(*) \quad = \|\Delta y_0\|^2 + 2h \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{s} b_i \langle \Delta Y_i , \Delta \dot{Y}_i \rangle - h^2 \sum_{i,j=1}^{s} \underline{m_{ij}} \langle \Delta \dot{Y}_i , \Delta \dot{Y}_j \rangle$$

$$(*) \quad \ulcorner \; \underline{2} \sum_{i,j=1}^{s} \underline{a_{ij}}\, \underline{b_i} \operatorname{Re} \langle \Delta \dot{Y}_j , \Delta \dot{Y}_i \rangle = \sum_{i,j=1}^{s} (\underline{a_{ij} b_i} + \underline{a_{ji} b_j}) \langle \Delta \dot{Y}_j , \Delta \dot{Y}_i \rangle \; \lrcorner$$

$$= \|\Delta y_0\|^2 + 2h \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{s} b_i \langle \Delta Y_i , \Delta \dot{Y}_i \rangle - h^2 \sum_{i,j=1}^{s} m_{ij} \langle \Delta \dot{Y}_i , \Delta Y_j \rangle$$

Wegen (D) $\mathrm{Re}\langle \Delta Y_i, \Delta \dot{Y}_i\rangle \leq 0$

$b_i \geq 0$

$\sum_{i,j=1}^{s} m_{ij} \langle \Delta \dot{Y}_i, \Delta \dot{Y}_j\rangle \geq 0$ da M positiv semidefinit

$\Rightarrow \|\Delta y_1\| \leq \|\Delta y_0\|$

$\square$