(5.11) Kollokationsverfahren

Wir betrachten wieder das Anfangswertproblem

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \qquad t \in [t_0, T]$$

Es seien $c_1 < \cdots < c_s \in [0, 1]$ *und eine Schrittweite* h *vorgegeben. Gesucht ist ein Polynom* u *vom Grad* $\leq s$, *welches die Kollokationsbedingungen*

$$\begin{aligned} u(t_0) &= y_0 \\ u'(t_0 + c_i h) &= f(t_0 + c_i h, u(t_0 + c_i h)), \quad i = 1, \ldots, s \leftarrow \end{aligned}$$

erfüllt. Wir setzen dann $y_1 = u(t_0 + h)$.

Das Kollokationspolynom u *hat die richtigen Steigungen an den Kollokationspunkten* $t_0 + c_i h$, $i = 1, \ldots, s$ *und den richtigen Anfangswert* $u(t_0)$.

(1) Satz

Das Kollokationsverfahren ist äquivalent zum impliziten RKV

$$\begin{array}{c|c} c_i & a_{ij} \\ \hline & b_j \end{array}, \qquad i, j = 1, \ldots, s$$

mit den Koeffizienten

$$a_{ij} = \int_0^{c_i} \ell_j(x) dx, \qquad b_j = \int_0^1 \ell_j(x) dx,$$

wobei

$$\ell_j(x) = \frac{\prod_{k \neq j}(x - c_k)}{\prod_{k \neq j}(c_j - c_k)}$$

$\deg(\ell_j) \leq s-1$

$\ell_j(c_k) = \delta_{jk}$

das j*-te Lagrange-Polynom zu den Knoten* $c_1, \ldots, c_s$ *ist.*

Notation   Ableitung von u an $t_0 + c_j h$

Beweis

$$\dot{Y}_j := \dot{u}(t_0 + c_j h)$$

$$Y_j := u(t_0 + c_j h)$$

wegen der Kollokationsbedingungen gilt $\dot{Y}_j = f(t_0 + c_j h, Y_j)$ für $j = 1..s$

Da $u \in \mathcal{P}_s$ ist $\dot{u} \in \mathcal{P}_{s-1}$

$\dot{u}$ stimmt mit dem Interpolationspolynom zu

$\left(t_0 + c_j h, \dot{u}(t_0 + c_j h)\right)$ $j = 1..s$ überein, d.h

$$\dot{u}(t_0 + \tau h) = \sum_{j=1}^{s} \dot{u}(t_0 + c_j h)\, \ell_j(\tau) = \sum_{j=1}^{s} \dot{Y}_j\, \ell_j(\tau) \leftarrow$$

Außerdem ist

$$Y_i = u(t_0 + c_i h) = u(t_0) + h \int_0^{c_i} \dot{u}(t_0 + \tau h)\, d\tau$$

$$= y_0 + h \sum_{j=1}^{s} \dot{Y}_j \underbrace{\int_0^{c_i} \ell_j(\tau)\, d\tau}_{a_{ij}}$$

$$= y_0 + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \dot{Y}_j$$

$$y_1 = u(t_0 + h) = u(t_0) + h \int_0^1 \dot{u}(t_0 + \tau h)\, d\tau$$

$$= y_0 + h \sum_{j=1}^{s} \dot{Y}_j \underbrace{\int_0^1 \ell_j(\tau)\, d\tau}_{= b_j}$$

$\square$

(1) Bemerkung

1. $\ell_j(x)$ *ist ein Polynom vom Grad* $\leq s-1$ *mit*

$$\ell_j(c_k) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases} \quad ✓$$

2. *Die Existenz und Eindeutigkeit des Kollokationspolynoms für* h *klein genug wird später gezeigt.*
3. *Die Koeffizienten aus Satz 1 erfüllen*

$$\sum_{j=1}^{s} b_j c_j^{k-1} = \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_j^{k-1} = \frac{1}{k} c_i^k \qquad (1)$$

für $i, k = 1 \ldots, s.$

wegen $\sum_{j=1}^{s} \ell_j(\tau)\, c_j^{k-1} = \tau^{k-1}$ für $k \leq s$

erhält man

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_j^{k-1} = \int_0^{c_i} \underbrace{\sum_{j=1}^{s} \ell_j(\tau)\, c_j^{k-1}}\, d\tau$$

$$= \int_0^{c_i} \tau^{k-1}\, d\tau = 1/_k\, c_i^k$$

und $\sum_{j=1}^{s} b_j c_j^{k-1} = \int_0^1 \sum_{j=1}^{s} \ell_j(\tau)\, c_j^{k-1}\, d\tau = \int_0^1 \tau^{k-1}\, d\tau = 1/_k$

iii) Zu gegebenen Knoten c_j $j = 1..s$ können b_j $j=1..s$ und a_{ij} $i,j = 1..s$ aus den obigen linearen Gleichungen berechnet werden

Satz 2

Das Kollokationsverfahren hat dieselbe Ordnung wie die zugehörige Quadraturformel, d.h das implizite RKV aus Satz 1 hat Ordnung p

genau dann wenn

$$\int_0^1 g(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{s} b_j\, g(c_j)$$

die Ordnung p hat, also exakt für Polynome in $\mathcal{P}_{p-1}$ ist.

Einschub / Wiederholung

Für eine lineare DGL in $\mathbb{R}^d$

$$\dot{y} = A(t)\, y$$
$$y(t_0) = y_0$$

hängt die Lösung linear von den Anfangswerten ab, d.h. die Lösung von

$$\dot{z} = A(t)\, z$$
$$z(t_0) = \alpha y_0 + \beta \tilde{y}_0$$

ist $z(t) = \alpha y(t) + \beta \tilde{y}(t)$ wobei y und $\tilde{y}$ Lösungen

von $\dot{y} = Ay$ mit Anfangswerten y_0 bzw $\tilde{y}_0$ sind

also ist $y(t) = R(t,t_0)\, y_0$ für $R : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^{d\times d}$

Differentiation nach t liefert

$$\dot{y} = \partial/\partial t\, R(t,t_0)\, y_0 = A(t)\, y(t) = A(t)\, R(t,t_0)\, y_0 \quad \text{für alle } y_0 \in \mathbb{R}^d$$

$$\partial/\partial t\, R(t,t_0) = A(t)\, R(t,t_0)$$

Für die inhomogene DGL

$\dot{y}(t) = A(t)\,y(t) + g(t)$ erhält man mit der

Variation der Konstanten Formel / Duhamel

$$y(t) = R(t,t_0)\,y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,\tau)\,g(\tau)\,d\tau \qquad (*) \leftarrow$$

Beweis von Satz 2

ohne Einschränkung sei das ANP autonom, d.h

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Es gilt $\dot{u}(t) = f(u(t)) + \delta(t)$ für δ mit $\delta(t_0 + c_j h) = 0$ für $j = 1..s$

Betrachte für einen Homotopieparameter $\sigma \in [0,1]$

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = f(z(t)) + \sigma\,\delta(t) \\ z(t_0) = y_0 \leftarrow \end{cases} \qquad (**) \leftarrow$$

mit Lösung $z(t;\sigma)$. Dann ist $z(t;0) = y(t)$ und $z(t;1) = u(t)$

und damit

$$u(t) - y(t) = z(t;1) - z(t;0) = \int_0^1 \partial/\partial\sigma\, z(t,\sigma)\,d\sigma \qquad (***)$$

Differentiation von $(**)$ nach σ

$$\partial/\partial\sigma\ \partial/\partial t\ z(t;\sigma) = f'(z(t;\sigma)) \cdot \partial/\partial\sigma\, z(t;\sigma) + \delta(t)$$

$$\begin{cases} \left(\partial/\partial\sigma\, z(t;\sigma)\right)^{\cdot} = A_\sigma(t)\ \partial/\partial\sigma\, z(t;\sigma) + \delta(t) \\ \partial/\partial\sigma\, z(t_0,\sigma) = 0 \end{cases}$$

mit (*)

$$\partial/_{\partial\sigma}\, z(t;\sigma) = \int_{t_0}^{t} R_\sigma(t,\tau)\, \delta(\tau)\, d\tau$$

Einsetzen in (***)

$$u(t_0+h) - y(t_0+h)$$

$$= \int_0^1 \int_{t_0}^{t_0+h} R_\sigma(t_0+h,\tau)\, \delta(\tau)\, d\tau\, d\sigma$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+h} \underbrace{\int_0^1 R_\sigma(t_0+h,\tau)\, d\sigma}_{=:\, g(\tau)}\, \delta(\tau)\, d\tau$$

$$\underset{(!)}{=} h \sum_{j=1}^{s} b_j\, g(t_0+c_jh) + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

(!) falls g glatt und da Ordnung der QF p — g glatt wenn f glatt

$g(t_0+c_jh) = 0$ weil $\delta(t_0+c_jh) = 0$

$\square$

(5.12) A-stabile RKV

$\dot{y} = \lambda y$

Ein RKV angewandt auf die Testgleichung mit Schrittweite h ergibt

$$\rightarrow \quad Y_i = y_0 + h\lambda \sum_{j=1}^{s} a_{ij} Y_j \qquad i = 1..s$$

$$y_1 = y_0 + h\lambda \sum_{i=1}^{s} b_i Y_i$$

in kompakter Form mit Matrix $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{s}$ und Vektoren

$\mathcal{Y} = (Y_1^T, .. Y_s^T)^T \qquad b = (b_1 .. b_s)^T$ und $e = (1, .. 1)^T \in \mathbb{R}^s \qquad (e = \mathbb{1})$

$$\mathcal{Y} = y_0 \cdot e + h\lambda \mathcal{A} \mathcal{Y}$$

$$y_1 = y_0 + h\lambda b^T \mathcal{Y}$$

Für $z = h\lambda$ und $I = id_s$ ist $\mathcal{Y}$ Lösung von

$$(I - z\mathcal{A})\mathcal{Y} = y_0 e$$

Falls z^{-1} kein Eigenwert von $\mathcal{A}$ ist, so ist

$$y_1 = y_0 + z\, b^T (I - z\mathcal{A})^{-1} e\, y_0 =: R(z) y_0$$

$y_1 = R(z) y_0$

$y_n = R(z)^n y_0$

Definition 1

Die Funktion $R(z) = 1 + z\, b^T (I - z\mathcal{A})^{-1} e$ heißt Stabilitätsfunktion des durch $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{s}$ und $b = (b_1 .. b_s)^T$ gegebenen RKVs

Lemma 2

Mit obiger Definition gilt $R(z) = \dfrac{\det(I - z\mathcal{A} + z e b^T)}{\det(I - z\mathcal{A})}$ <-

Beweis $\boxed{\text{ÜA}}$

Korollar 3

Der Stabilitätsbereich eines impliziten RKV$_s$ ist

$$S = \{ z \in \mathbb{C} \;:\; I - z\mathfrak{A} \text{ ist invertierbar und } R(z) \leq 1 \}$$

Beweis klar