(5.5) Bemerkung

i) Definition (5.3) ist nur sinnvoll, wenn die numerische Lösung von $\dot{y} = \lambda y$, $y(0) = y_0$ nur von $h\lambda$ und linear von y_0 abhängt.
Für RKVen und MSVen ist das der Fall.

ii) Ein Verfahren ist 0-stabil oder stabil falls $0 \in S$

iii) Ist $\dot{y} = Ay$ mit diagonalisierbaren Matrix A d.h. $T^{-1}AT = \Lambda$ für Diagonalmatrix Λ so kommutieren für fast alle numerischen Verfahren folgende Diagramme

(1)

$$\begin{tikzcd}
{\dot{y} = Ay,\ y(0) = y_0} \arrow[r, "y = Tz"] \arrow[d, "\text{num. Verfahren}"] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & {\dot{z} = \Lambda z,\ z(0) = z_0 = T^{-1}y_0} \arrow[d, "\text{numerisches Verfahren}"] \\
(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \arrow[r, "y = Tz"] & (z_n)_{n \in \mathbb{N}}
\end{tikzcd}$$

(2)

sowie für $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\begin{tikzcd}
{\dot{y} = \Lambda y,\ y(0) = y_0} \arrow[r, "\text{Projektion auf } i\text{-te Komponente}"] \arrow[d, "\text{num. Verfahren}"] & {\dot{y}_i = \lambda_i y_i,\ y_i(0) = y_{0_i}} \arrow[d, "\text{num. Verfahren}"] \\
(y_n)_n \arrow[r, "\text{Projektion auf } i\text{-te Komponente}"'] & (y_{n_i})_n
\end{tikzcd}$$

$$\dot{y} = f(t,y) \underset{\text{Taylor in } y}{\approx} \underline{J_y f(t_0) \cdot y} + \underbrace{O(\|y\|^2)}_{\text{klein}}$$

(5.6) Explizite Runge Kutta Verfahren

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t,y) & t \in [t_0, T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\approx \int_{t_0}^{t_0+c_i h} f(t, y(t))\, dt}$$

$$Y_i = y_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(t_0 + c_j h, Y_j) \qquad i = 1..s$$

$$y_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^{s} b_i f(t_0 + c_i h, Y_i)$$

$\approx y(t_0 + h)$

$a_{ij} = 0$ für $j \geq i$ für explizite RKV

Anwenden auf Testgleichung:

$\hookrightarrow f(t,y) = \lambda y$

$$Y_i = y_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \lambda Y_j \qquad i = 1..s$$

$$y_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^{s} b_i \lambda Y_i$$

$\Rightarrow \quad y_1 = P(h\lambda)\, y_0$

$y_1 = P(h\lambda)\, y_0$ für ein Polynom von Grad $\leq s$ $\qquad y_n(z) = (P(z))^n y_0$

Satz: Der Stabilitätsbereich eines expliziten RKVs ist beschränkt

(5.7) Explizite Mehrschrittverfahren

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f(t_{n+j}, y_{n+j}) \qquad \beta_k = 0$$

Anwenden auf Testgleichung ergibt

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = z \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j y_{n+j} \qquad z = h\lambda$$

Die charakteristische Gleichung für diese Differenzengleichung ist

$$\longrightarrow \quad \sum_{j=0}^{k} (\alpha_j - z\beta_j)\, \xi^j = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho(\xi) - z\,\sigma(\xi) = 0$$

$$y_n = \sum_{i=1}^{k} C_i\, \xi_i^n$$

k Anzahl der Wurzeln der charakteristischen Gleichung

Satz 1 Der Stabilitätsbereich eines durch ρ und σ gegebenen MSVs ist

$$S = \{ z \in \mathbb{C} : |\xi(z)| \le 1 \text{ und } |\xi(z)| = 1 \Rightarrow \xi(z) \text{ ist einfache}$$
$$\text{Wurzel, wobei } \xi(z) \text{ Wurzel von } \rho(\xi) - z\,\sigma(\xi) \}$$

Beweis Dahlquistsche Wurzelkriterium Satz 4.14 vgl $\boxed{\text{ÜA}}$

Definition Ein MSV mit $\mathrm{ggT}(\rho, \sigma) = 1$ heißt irreduzibel

Satz 2 $\qquad \rho(\xi) - z\,\sigma(\xi) = 0$

Für ein irreduzibles MSV mit Stabilitätsbereich S gilt

$$S \subseteq \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\rho(\xi)}{\sigma(\xi)} : |\xi| > 1 \right\}$$

Beweis Nach Satz 1 ist für $z \in S$

$$\rho(\zeta) - z\,\sigma(\zeta) \neq 0 \quad \forall\ |\zeta| > 1$$

Das heißt für $z \in S$ ist

i) $z \neq \rho(\zeta)/\sigma(\zeta)$ für $|\zeta| > 1$ und $\sigma(\zeta) \neq 0$ oder

ii) $\rho(\zeta) \neq 0$ für $|\zeta| > 1$ und $\sigma(\zeta) = 0$

ii) ist erfüllt da $ggT(\rho, \sigma) = 1$ und damit $\rho(\zeta) \neq 0$ falls $\sigma(\zeta) = 0$

Also gilt für $z \in S$ $\quad z \neq \rho(\zeta)/\sigma(\zeta)$ für $|\zeta| > 1$ und $\sigma(\zeta) \neq 0$

$\square$

Satz 3 Ist $ggT(\sigma, \rho) = 1$ und ist $\sigma(\zeta) = 0$ für ein ζ mit $|\zeta| > 1$ so ist S beschränkt

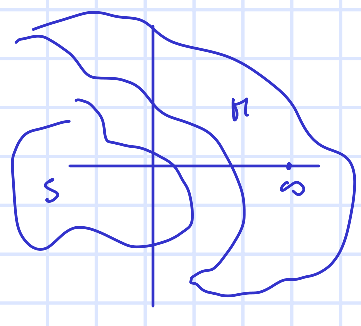
Beweis $\boxed{\text{ÜA}}$

Satz 4 Der Stabilitätsbereich eines expliziten MSVs ist beschränkt

Beweis Wir betrachten

$$\omega(\zeta) = \frac{\sum_{j=0}^{k} \beta_j \zeta^{k-j}}{\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \zeta^{k-j}} = \frac{\overset{0}{\beta_k} + \beta_{k-1}\zeta + \dots \beta_0 \zeta^k}{\underset{1}{\alpha_k} + \alpha_{k-1}\zeta + \dots \alpha_0 \zeta^k}$$

$$= \frac{\cancel{\zeta^k}\,\sigma(\zeta^{-1})}{\cancel{\zeta^k}\,\rho(\zeta^{-1})}$$



Nach Satz 2 ist $\quad S \subseteq \mathbb{C} \setminus \underbrace{\left\{ \frac{\rho(\zeta)}{\sigma(\zeta)} : |\zeta| > 1 \right\}}_{M}$

$$= \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{1}{\omega(\zeta)} : |\zeta| < 1 \right\}$$