(4.18) Satz

Ein konvergentes lineares MSV hat mindestens Ordnung 1.

Beweis Wir zeigen $\rho(1) = 0$ und $\sigma(1) = \rho'(1)$

i) $y' = 0 \quad y(0) = 1$

Startwerte $y_0 = y_1 = y_2 = \dots y_{k-1} = 1$

$\alpha_k y_{n+k} + \alpha_{k-1} y_{n+k-1} + \dots \alpha_0 y_n = 0$

Konvergenz

$y_n \to 1$ für $h \to 0$

$\Rightarrow \underbrace{\sum \alpha_j}_{\rho(1)} = 0$

ii) $y' = \underline{\underline{1}} \qquad y(0) = 0 \qquad$ Lösung $y(t) = t$

Es gilt $\alpha_k \big(a(n+k)h\big) + \alpha_{k-1} a(n+k-1)h + \dots + \alpha_0 a n h$

$= ah \sum_{j=0}^{k} j \alpha_j + anh \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \alpha_j}_{=0 \,=\, \rho(1) \text{ nach i)}}$

$= ah\, \rho'(1)$

$= h\, \sigma(1) = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j 1$

$(a j h)_j$ löst (MSV)

für $a = \sigma(1) / \rho'(1)$ $\quad$ ($\rho'(1) \neq 0$ da nach (4.14) 1 einfache ist)

Für die Startwerte $y_j = \frac{\sigma(1)}{\rho'(1)} j h \xrightarrow{h \to 0} 0 \qquad j = 0 .. k-1$

folgt damit aus der Konvergenz des MSV

$y_n(t) \to t \qquad \sigma(1)/\rho'(1) = 1 \Rightarrow \sigma(1) = \rho'(1)$ $\square$

(4.19) Definition

(vgl. modifizierte (4.16) von oben)

Sei $y : [t_0, T] \to \mathbb{R}^d$ Lösung eines AWPs. Die Gitterfunktion y_Δ die durch MSV gegeben ist konvergiert mit Ordnung p gegen y, falls

$$\| y_\Delta(t) - y(t) \| = \mathcal{O}(h^p) \quad \text{für } h \to 0 \quad t \in \Delta_h \cap [t_0, T]$$

und

$$\| y_j - y_0 \| = \mathcal{O}(h^p) \quad \text{für (Startwerte) } j = 0..k-1 \quad h \to 0$$

(4.20) Satz

Falls die k Startwerte $\| y(t_j) - y_j \| \leq C_0 h^p$ für $j = 0..k-1$ erfüllen, der lokale Fehler des MSV Ordnung p hat und das MSV 0-stabil ist, so konvergiert das MSV mit Ordnung p.

Beweis 1. Version

Idee 1. Umformulierung zu einem Einschrittverfahren

2. Wie (3.9) in i) lokaler Fehler

ii) Propagation des Fehler $\leftarrow$ Stabilität

iii) Akkumulation des Fehlers

$$\alpha_k = 1$$

$$y_{n+k} = - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} + h \underbrace{\psi(t_n, y_n, \dots y_{n+k-1}, h)}$$

Für ein explizites Verfahren ist

$$\psi(t_n, y_n, \ldots, y_{n+k-1}, h) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f(t_{n+j}, y_{n+j})$$

Für ein implizites Verfahren ist

$$\left[\ \psi(t_n, \underbrace{y_n, \ldots, y_{n+k-1}}, h) = \beta_k f(t_{n+k}, X) + \sum_{j=0}^{k} \beta_j f(t_{n+j}, y_{n+j})\right.$$

wobei X Lösung von

$$X + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \underline{y_{n+j}} = \underline{h} \beta_k f(t_{n+k}, X) + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f(t_{n+j}, \underline{y_{n+j}}) \leftarrow$$

$$\left(\begin{array}{ll} \text{ist } \overset{\uparrow}{I} & h\, J_X f \cdot \overset{\uparrow}{X} \\ g(X\,;\, y_s) = 0 \leftarrow & \end{array} \right)$$

ist.

Für $\underline{Y_n} = \begin{bmatrix} y_{n+k-1} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d \cdot k}$, $\}\in \mathbb{R}^d$ kann das (MSV) als Einschrittverfahren geschrieben werden

$$\underline{Y_{n+1}} = A\, \underset{\sim}{Y_n} + h\, \underline{\psi}(t_n, \underline{Y_n}, h) \quad \text{mit}$$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha_{k-1} I_d & -\alpha_{k-2} I_d & \cdots & -\alpha_1 I & -\alpha_0 I \\ 1 \cdot I_d & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 \cdot I_d & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}} \in \mathbb{R}^{k \cdot d \times k \cdot d}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\alpha_{k-1} & & \cdot\alpha_0 \\ 1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots \\ & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \tilde{A} \otimes I_d$$

$$\underline{\psi}(t_n, \underline{Y_n}, h) = \begin{bmatrix} \psi(t_n, \underline{Y_n}, h) \\ 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{dn}$$

i) Lokaler Fehler

Setzt man $\underline{Y}(t_n) = \left(y(t_{n+k-1})^T, \dots, y(t_n)^T \right)^T$

und definiert $\quad \underline{\hat{Y}}_n = A\,\underline{Y}(t_n) + h\,\underline{\Psi}(t_n, \underline{Y}_n(t_n), h)$

dann ist die erste Komponente (die ersten d Einträge) von

$\underline{\hat{Y}}_{n+1} - \underline{Y}(t_{n+1})$ der lokale Fehler aus (4.6) und alle

anderen Komponenten sind Null.

Da das MSV Ordnung p hat ist

$$\| \underline{\hat{Y}}_{n+1} - \underline{Y}(t_{n+1}) \| \leq C_1 h^{p+1}$$

ii) Fehlerfortpflanzung (Stabilität)

Für $\underline{Z}_{n+1} = A\,\underline{Z}_n + h\,\underline{\Psi}(t_n, \underline{Z}_n, h)$ gilt dann

$$\| \underline{Y}_{n+1} - \underline{Z}_{n+1} \| \leq \underbrace{\| A \|} \, \| \underline{Y}_n - \underline{Z}_n \| + h L \, \| Y_n - Z_n \|$$

für die Lipschitzkonstante L von $\underline{\Psi}(t_n, Y_n, h)$ in der zweiten Komponente

(Ψ ist Lipschitzstetig falls f glatt und h klein genug)

Lemma: Falls das MSV stabil ist, existiert eine Norm auf $\mathbb{R}^{k\cdot d}$ so, dass $\| A \| \leq 1$

Beweis: Ist λ Wurzel von $g(x)$ dann ist der Vektor $(\lambda^{k-1}, \lambda^{k-2}, \dots \lambda^0)^T$ ein Eigenvektor von $\tilde{A}$ zum Eigenwert λ

$$\begin{bmatrix} -\alpha_{k-1} & -\alpha_{k-2} & & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^{k-1} \\ \lambda^{k-2} \\ \vdots \\ \lambda^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \lambda^j \\ \lambda^{k-1} \\ \vdots \\ \lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \lambda^{k-1} \\ \vdots \\ \lambda^0 \end{bmatrix}$$

$\sum_{j=0}^{k} \kappa_j \lambda^j = 0$

Ist umgekehrt λ ein Eigenwert von $\tilde{A}$ so ist $\underline{\underline{g(\lambda) = 0}}$

Γ (λ, v) Eigenwert und Eigenvektor von A

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} \Rightarrow A v = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{k} -\kappa_{k-j} v_j \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix}$$

$\leftarrow$ $\underline{\underline{1. \text{ Zeile}}}$

1. Fall $\lambda = 0$

Dann ist $v_1 = v_2 = v_{k-1} = 0$

Da $v \neq 0$ muss $v_1 \neq 0$ OE $v_1 = 1$

1. Zeile $\Rightarrow$ $\kappa_0 = 0$

$\Rightarrow$ $g(0) = \kappa_0 + \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \kappa_j 0^j}_{=0} = 0$

2. Fall $\lambda \neq 0$

Dann ist $v_j = \lambda v_{j+1}$ $j = 1 .. k-1$ $\leftarrow$

$v_k \neq 0$ sonst $v_1 = v_2 = \dots = v_k = 0$ $\lightning$ zu $v \neq 0$

OE $v_k = 1$

$\Rightarrow$ $v_j = \lambda^{k-j}$ $\overset{1. \text{ Zeile}}{\Rightarrow}$ $\sum_{j=1}^{k} -\kappa_{k-j} \lambda^{k-j} = \underbrace{\kappa_k}_{=1} \lambda^k$

$\Rightarrow$ $g(\lambda) = 0$

Dabei erfüllen die Eigenwerte von A, die Wurzeln von $g(X)$, die Dahlquist Wurzelbedingung (4.14). Transformiert man A auf Jordannormalform so erhält man

$$T^{-1} A T = \begin{bmatrix} J(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_m) \end{bmatrix} = J \quad \text{mit} \quad J(\lambda_j) = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \lambda_j \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j}$$

Ist $|\lambda_j| = 1$ so ist $\dim\big(J(\lambda_j)\big) = 1$.

Durch Skalierung der Spalten von T und Sortierung erhält man

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_\ell & & & \\ & & & \lambda_{\ell+1} & \varepsilon_{\ell+1} & \\ & & & & \ddots & \varepsilon_{k-1} \\ & & & & & \lambda_k \end{bmatrix}$$

mit $|\varepsilon_j| < 1 - |\lambda_j|$

$\underline{\underline{D}} = \operatorname{diag}\big(1, \ldots 1, \cancel{\varepsilon}(1-|\lambda_j|)^k \ldots\big)$

$k = 1 \ldots m_j$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{T}^{-1} A \tilde{T} = \tilde{J}}$$

Damit ist $\|\tilde{J}\|_\infty \leq 1$ und mit

$\|\underline{Y}\| := \|\tilde{T}^{-1} \underline{Y}\|_\infty$ folgt

$$\|A\underline{Y}\| = \|\tilde{T}^{-1} A \underline{Y}\|_\infty = \|\tilde{J}\tilde{T}^{-1}\underline{Y}\|_\infty \leq \|\tilde{T}^{-1}\underline{Y}\|_\infty = \|\underline{Y}\|$$

und damit die Behauptung $\lrcorner$

Damit ist $\|Y_{n+1} - Z_{n+1}\| \leq (\underline{1} + hL)\|Y_n - Z_n\|$

Rest wie in (3.8) $\square$