Bemerkung

Ein MSV hat mindestens Ordnung 1 falls

i) $\sum_{j=0}^{k} \alpha_j = 0$ und

ii) $\sum_{j=0}^{k} j\alpha_j = \sum_{j=0}^{k} \beta_j$

Setzt man $\rho(X) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j X^j$

$\sigma(X) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j X^j$

so sind i) und ii) äquivalent zu

i') $\rho(1) = 0$

ii') $\rho'(1) = \sigma(1)$

(4.11) Maximale Ordnung

$p+1$ Ordnungsbedingungen für (k) MSV der Ordnung p

$2(k+1)$ Parameter α_j, β_j $j = 0, \ldots k$

? maximales $p = 2k+1$

Aber das MSV ist homogen, d.h. (MSV) kann mit einer beliebigen Zahl multipliziert werden

$\rightsquigarrow$ Normierung $\alpha_k = 1$

$\rightsquigarrow$ $2k+1$ freie Parameter

$\rightsquigarrow$ maximale Ordnung $2k$ (implizite MSV)

bzw $2k-1$ (explizite MSV $\beta_k = 0$)

(4.12) Beispiel

Explizites Zweischrittverfahren der Ordnung 3

$$\underbrace{\alpha_2}_{=1} y_{n+2} + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_0 y_n = h\Big(\underbrace{\beta_2}_{=0} f(t_{n+2}, y_{n+2}) + \beta_1 f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \beta_0 f(t_n, y_n)\Big)$$

Vier Ordnungsbedingungen

$\underline{I}$ $\quad 1 + \alpha_1 + \alpha_0 = 0$

$\underline{II}$ $\quad 2 + \alpha_1 = \beta_1 + \beta_0$

$\underline{III}$ $\quad 4 + \alpha_1 = 2\beta_1$

$\underline{IV}$ $\quad 8 + \alpha_1 = 3\beta_1$

$\underline{IV} - \underline{III}$ $\quad 4 = \beta_1$

$\underline{III}'$ $\quad 4 + \alpha_1 = 8 \quad \rightsquigarrow \quad \alpha_1 = 4$

$\underline{II}'$ $\quad 2 + 4 = 4 + \beta_0 \quad \rightsquigarrow \quad \beta_0 = 2$

$\underline{I}'$ $\quad 1 + 4 + \alpha_0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \alpha_0 = -5$

Triviale Testgleichung $\quad \begin{cases} \dot{y} = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Lösung $\quad y(t) = 1$

<u>HSV:</u> $\quad y_{n+2} + 4y_{n+1} - 5y_n = 0$

$$z_n = \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$z_{n+1} = \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ -4y_{n+1} + 5y_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}}_{= A} \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = Az_n$$

Eigenwert von A $\quad \lambda(\lambda + 4) - 5 = 0$

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = 1, -5$$

$z_j = (-5)^j z_0$ falls z_0 Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = -5$ ist

(4.13) Definition

Ein MSV heißt 0-stabil (oder stabil), falls alle Lösungen der Differenzengleichung

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = 0$$

(für $n \to \infty$) beschränkt bleiben.

(4.14) Satz (Dahlquistsche Wurzelbedingung)

Ein MSV ist genau dann 0-stabil, wenn für alle Nullstellen λ von $g(X) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j X^j$ gilt

i) $|\lambda| \leq 1$ und

ii) $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda$ ist einfache Wurzel

Beweis: $\boxed{[\ldots]}$

(4.15) Beispiel

$$y_{n+2} - y_n = 2h\, f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

$g(X) = X^2 - 1$ $\qquad \lambda_{1/2} = \pm 1$ beide einfach

(4.16) Definition

Sei $y: [t_0, T] \to \mathbb{R}^d$ Lösung eines AWPs

Die Gitterfunktion y_Δ eines MSVs konvergiert gegen y

falls i) $y_\Delta(t) \to y(t)$ für $h \to 0$ und $t \in \Delta_h \cap [t_0, T]$

$$\Delta_h = \{t_0 + jh : j \in \mathbb{N}\}$$

ii) für die Startwerte $y_0 \ldots y_{k-1}$ gilt

$$y_j \to y_0 \text{ für } h \to 0 \quad j = 0 \ldots k-1$$

Ein MSV heißt konvergent, falls y_Δ für jedes AWP mit glatter rechter Seite f und geeigneten y_j $j = 0 \ldots k-1$ konvergiert

(4.14) Satz

Ein konvergentes lineares MSV ist 0-stabil

Beweis (Widerspruchsbeweis)

Annahme: Es ex konvergentes MSV das nicht stabil ist

Dann existieren Startwerte $y_0 \dots y_{k-1}$ so, dass die durch

$$y_{n+k} + \alpha_{k-1} y_{n+k-1} + \dots + \alpha_0 y_n = 0$$

definierte Folge nicht beschränkt ist.

Setze $\varepsilon_k = 1/\sqrt{y_k}$

Für eine Teilfolge gilt dann $\varepsilon_\ell \to 0$ und "$\varepsilon_\ell y_\ell \to \infty$"

Sei $t \in [t_0, T]$ $n \in \mathbb{N}$ und $h = t/n$

Zur Lösung von $y' = 0$ $y(0) = 0$ wähle Startwerte

$$Y_\Delta(t_j) = Y_\Delta(hj) = \varepsilon_n y_j \quad j = 0 \dots k-1$$

Dann ist

$$Y_\Delta(t_j) \to 0 = y(0) \quad \text{für } h \to 0$$

Andererseits ist

$$Y_\Delta(t_n) = \varepsilon_n y_n \to \infty \quad \text{für } h \to 0 \quad n \to \infty$$

Also ist das MSV nicht konvergent

↯ □