(4.6) Definition (lokaler Fehler / Differenzenoperator)

Der lokale Fehler eines linearen MSV ist durch $y(t_k) - y_k$ gegeben. Hierbei $y(t)$ ist die exakte Lösung zur Zeit t $t > t_0$ des AWPs

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$ und y_k die durch (MSV) berechnete Lösung mit exakten Startwerten

$y_\ell = y(t_\ell)$ $\ell = 0, \dots k-1$ $t_\ell = t_0 + h\ell$

~~(4.7) Lemma~~ Der zu (MSV) gehörige Differenzenoperator ist

$$L(\underline{y}, t, h) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j y(t+jh) - h\beta_j f(t+jh, y(t+jh))$$

(exakte Lösung eingesetzt in (MSV))

(4.7) Lemma

Ist f stetig diffbar so gilt für den lokalen Fehler

$$\underline{y(t_k) - y_k} = \left(\alpha_k I - h\beta_k \frac{\partial f}{\partial y}(t_k, \eta)\right)^{-1} L(y, t_0, h)$$

für η "zwischen" y_k und $y(t_k)$

Beweis:

$$\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y(t_j) - h\beta_j f(t_j, y(t_j)) + \alpha_k y_k - h\beta_k f(t_k, y_k) = 0 \quad \leftarrow$$

$$\Rightarrow L(y, t_0, h) = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y(t_j) - h\beta_j f(t_j, y(t_j)) + \alpha_k y(t_k) - h\beta_k f(t_k, y(t_k))$$
$$-\left(\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y(t_j) - h\beta_j f(t_j, y(t_j)) + \alpha_k y_k - h\beta_k f(t_k, y_k)\right)$$
$$= \alpha_k(\underline{y(t_k) - y_k}) - h\beta_k \underbrace{\left(f(t_k, y(t_k)) - f(t_k, y_k)\right)}_{= \partial/\partial y\, f(t_k, \eta)\, (\underline{y(t_k) - y_k})}$$

$$\Rightarrow \underline{y(t_k) - y_k} = \left(\alpha_k I - \underline{h\beta_k} \, \partial/\partial y\, f(t_k, \eta)\right)^{-1} L(y, t_0, h)$$

$\square$

(4.8) Definition (Ordnung eines MSV)

Ein MSV hat Ordnung p, falls für den lokalen Fehler für jedes AWP mit $\begin{cases} \dot y = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ $\forall f \in C^\infty$ und $y_0 \in \mathbb{R}^d$

$\| y(t_k) - y_k \| = \mathcal{O}(h^{p+1})$ gilt $\quad (y_\ell = y(t_\ell) \;\; \ell = 0..k-1)$

d.h. $\exists\; C > 0$ und $h_0 > 0$ $\quad \| y(t_k) - y_k \| \leq C h^{p+1} \quad \forall h \in (0, h_0]$

(4.9) Folgerung

Ein MSV hat die Ordnung p genau dann wenn $\quad \| L(y,t,h) \| = \mathcal{O}(h^{p+1})$

Beweis folgt aus (4.7) und der stetigen Differenzierbarkeit von f

für h klein genug existiert die Inverse von $\quad (\alpha_k I - \underbrace{h \beta_k \tfrac{\partial}{\partial y} f(t_k, \eta)}))$

$\square$

(4.10) Satz

Äquivalent sind

i) Das durch $(\alpha_j, \beta_j)_{j=0}^k$ gegebene MSV hat Ordnung $p \geq 1$

ii) $L(Q, 0, h) = 0 \quad \forall\; Q \in \mathcal{P}_p$ (Polynome vom Grad $\leq p$)

iii) $L(\exp, 0, h) = \mathcal{O}(h^{p+1}) \qquad \exp : t \mapsto e^t$

iv) $\underline{\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0}$ und $\underline{\sum_{j=0}^k \alpha_j j^\ell = \ell \sum_{j=0}^k \beta_j j^{\ell-1}}$ für $\ell = 1..p$ (Ordnungsbedingungen)

Beweis wir zeigen i) => ii) => iii) => iv => i)

"i) => ii)"

$y = Q \in C^\infty \overset{(4.9)}{\Longrightarrow} \quad L(Q, 0, h) = \mathcal{O}(h^{p+1})$

$L(Q, 0, h) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \; Q(0 + jh) - h \beta_j \dot Q(0 + jh)$

$= \sum_{j=0}^k \alpha_j \sum_{\ell=0}^p q_\ell (jh)^\ell - h \beta_j \sum_{\ell=0}^p q_\ell \, \ell \, (jh)^{\ell-1}$

$\Rightarrow \; L(Q, 0, h) = 0$

ii) ⇒ iii)

$$\exp(h) = Q(h) + \mathcal{O}(h^{p+1}) \quad \text{für ein spezielles Polynom}$$

L ist linear in y $\qquad\qquad \dot{\exp} = 1 \cdot \exp$

$$L(\exp, 0, h) = L(Q,0,h) + L(\mathcal{O}(h^{p+1}), 0, h) = \underbrace{L(Q,0,h)}_{\substack{=0 \\ \text{wegen ii)}}} + \mathcal{O}(h^{p+1}) = \mathcal{O}(h^{p+1})$$

iii) ⇒ iv)

$$L(\exp, 0, h) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \underbrace{e^{jh}}_{y(jh)} - h \sum_{j=0}^{k} \beta_j \underbrace{e^{jh}}_{\dot{y} = f(t,y)}$$

$$\underset{\text{Taylor}}{=} \sum_{e=0}^{p} \frac{1}{e!} \left(\sum_{j=0}^{k} \alpha_j (jh)^e - \underline{h} \sum_{j=0}^{k} \beta_j (jh)^e \right) + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \right) h^0$$

$$+ \left(\frac{1}{1!} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j j - \sum_{j=0}^{k} \beta_j \right) h^1$$

$$+ \ldots$$

$$+ \left(1/e! \sum_{j=0}^{k} \alpha_j j^e - 1/(e-1)! \underline{\sum_{j=0}^{k} \beta_j j^{e-1}} \right) h^e$$

$$+ \ldots$$

$$+ \mathcal{O}(h^{p+1})$$

$$= \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \alpha_j + \sum_{e=1}^{p} 1/e! \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{k} \alpha_j j^e - e \beta_j j^{e-1} \right)}} h^e + \mathcal{O}(h^{p+1}) \overset{!}{=} \mathcal{O}(h^{p+1})$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{k} \alpha_j = 0$$

$$\text{und} \quad \sum_{j=0}^{k} \alpha_j j^e - e \beta_j j^{e-1} = 0 \quad \text{für} \quad \underline{e = 1 \ldots p}$$

iv) ⇒ i)

$$L(y,t,h) = \sum_{j=0}^{k} \underline{\alpha_j} \underbrace{\sum_{\underline{e \geq 0}} \frac{(jh)^e}{e!} y^{(e)}(t)}_{\text{Taylor} \Rightarrow y(t+jh)} - \underline{h} \beta_j \underbrace{\sum_{\underline{e \geq 0}} \frac{(jh)^e}{e!} y^{(e+1)}(t)}_{\text{Taylor} \; \dot{y}(t+jh)}$$

$j^e h^{e+1}$

$$= y(t) \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \alpha_j}_{=0} + \sum_{e \geq 1} \frac{h^e}{e!} y^{(e)}(t) \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{k} \alpha_j j^e - e \beta_j j^{e-1} \right)}_{=0 \text{ für } e = 1..p}$$

mit (4.9) folgt die Behauptung □