Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

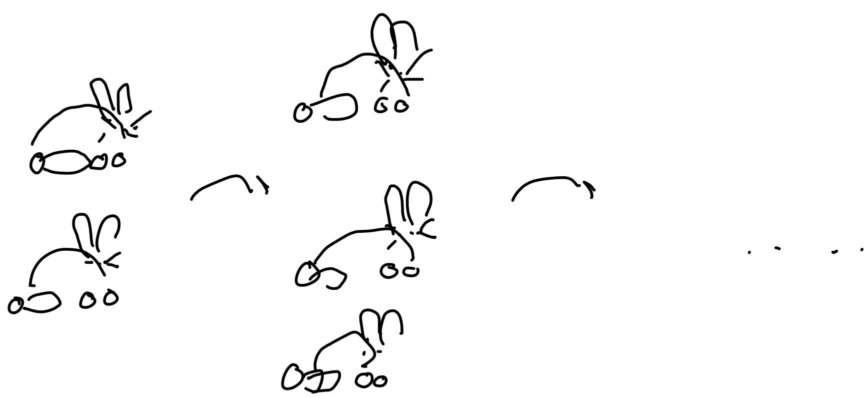
Achim Schädle, Marina Fischer

- Vorlesung: Mittwoch + Donnerstag 8:30-10:00 Uhr
- Übung: ?? Mittwoch 10:30-12:00 Uhr

→ Homepage
http://www.am.uni-duesseldorf.de/~schaedle/lehre/so2020/numerikIII/

1 Einführung

1.1 Populationsdynamik



1 Einführung

1.1 Populationsdynamik

Beispiel 1.1 (Exponentielles Wachstum)

- $y(t)$: Populationsgröße zur Zeit t
- Model : Veränderung der Populationsgröße $\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}y(t)$ ist proportional zur Populationsgröße

d.h.

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \alpha y(t) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

- $\alpha > 0$ Vermehrungsrate
- t_0 Anfangszeitpunkt
- y_0 Anfangswert

Lösung: $y(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)\alpha} y_0$
exponentielles Wachstum

Beispiel 1.2 (Räuber Beute Modell (Volterra 1920))

Die Anzahl $y(t)$ von Speisefischen zur Zeit t und
die Anzahl $z(t)$ von Raubfischen kann mit Hilfe des Populationsmodells

$$\begin{aligned} y' &= ay - byz, \\ z' &= -cz + dyz \end{aligned}$$

berechnet werden.
Hierbei ist a die Geburtenrate der Speisefische,
b Effizienz der Raubfische,
c die Sterberate der Raubfische,
d nahrungsabhängige Geburtenrate der Raubfische

1.2 Chemische Reaktionskinetik

Beispiel 1.3

Hier möchte man den Verlauf chemischer Reaktionen simulieren. Weiß man etwa, dass die Substanzen A, B, C gemäß

$$\begin{aligned} A &\stackrel{k_1}{\to} B \\ B + C &\stackrel{k_2}{\to} A + C \\ B + B &\stackrel{k_3}{\to} B + C \end{aligned}$$

mit Reaktionskonstanten k_1, k_2, k_3 reagieren,
dann liefert das Massenwirkungsgesetz für die Konzentrationen $a(t), b(t), c(t)$ der Substanzen A, B, C zur Zeit t

$$\begin{aligned} a' &= -k_1 a + k_2 bc \\ b' &= k_1 a - k_2 bc - k_3 b^2, \\ c' &= k_3 b^2. \end{aligned}$$

Zusätzlich müssen Anfangskonzentrationen $a(0), b(0)$ und $c(0)$ gegeben sein.

Beispiel 1.4

$\to$ **ÜA**

1.3 Newtonsche Mechanik

Betrachte Massepunkt mit Masse m und Postion $q(t) \in \mathbb{R}^3$ zur Zeit t. Seine Geschwindigkeit $v(t) = \dot{q}(t)$ ist die zeitliche Ableitung der Postion q.
Newtonsche Gesetze

1. Trägheitssatz: Wirkt auf einen Körper keine Kraft $F \in \mathbb{R}^3$, so ist seine Geschwindigkeit konstant.

$$F = 0 \to \dot{v}(t) = 0$$

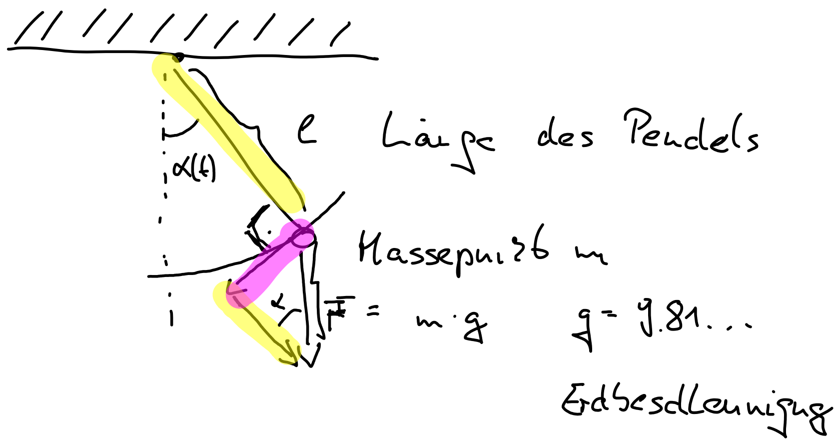
2. Die Änderung der Geschwindigkeit (Beschleunigung) ist proportional zur einwirkenden Kraft

$$m\dot{v}(t) = m\ddot{q}(t) = F$$

3. Action gleich Reactio

$$\text{Kraft} = \text{Gegenkraft}$$

Beispiel 1.5 (Pendel)



$F \cdot \sin(\alpha(t))$

$$m\ell\ddot{\alpha}(t) = F \cdot \sin(\alpha(t))$$

$$\begin{cases} \alpha(t_0) = \alpha_0 \\ \dot{\alpha}(t_0) \end{cases}$$

Beispiel 1.5 (Pendel)

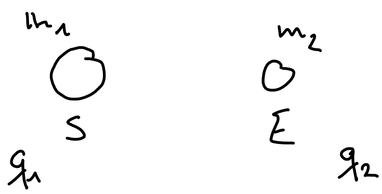
$$ms''(t) = -mg\sin(\phi(t))\ , \quad s(t) = l\phi(t)$$

$$\boxed{\phi''(t) = -\frac{g}{l}\sin(\phi(t))}$$

$$y(t) := \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \phi'(t) \end{pmatrix} \quad y'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \phi'(t) \\ -\frac{g}{l}\sin(\phi(t)) \end{pmatrix}}_{f(t,y(t))}$$

- $\phi(t)$ Winkel zur Zeit t, $s(t)$ Position zur Zeit t
- l Länge des Pendels, m Masse, g Erdbeschleunigung

Beispiel 1.6 (Keplerproblem)



Gravitationspotential $U = -G\frac{m_1 m_2}{\|q_1 - q_2\|_2}$

$U(q_1, q_2)$

Gravitationskraft:

$$F_{12} = -\nabla_{q_1} U = \boxed{} \quad \text{ÜA}$$

$$F_{21} = -\nabla_{q_2} U =$$

Bewegungsgleichungen

$$m_1\ddot{q}_1 = -\nabla_{q_1} U(q_1, q_2)$$
$$m_2\ddot{q}_2 = -\nabla_{q_2} U(q_1, q_2)$$

2 Theorie gewöhnlicher DGL

Definition 2.1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen und zusammenhängend $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $(t_0, y_0) \in \Omega$ dann heißt

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) \quad \leftarrow \text{Differentialgleichung}$$
$$y(t_0) = y_0 \quad \leftarrow \text{Anfangsbedingung}$$

Anfangswertproblem (AWP),
t_0 ist der Anfangszeitpunkt und y_0 der Anfangswert.
Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $t_0 \in I$ so heißt eine stetig differenzierbare Kurve

$$y : I \to \mathbb{R}^d : t \mapsto y(t)$$

Lösung des Anfangswertproblems (AWPs), falls

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in I$$

und $y(t_0) = y_0$

Bemerkung 2.2

Jede Differentialgleichung k-ter Ordnung

$$y^{(k)} = f(t, \underset{1}{\overset{\mathbb{R}^d}{y}}, y', \dots, \underset{k}{\overset{\mathbb{R}^d}{y^{(k-1)}}}).$$

$$f: \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d}_{k} \to \mathbb{R}^d$$

kann in ein System erster Ordnung umgeschrieben werden:

Bemerkung 2.2

Jede Differentialgleichung k-ter Ordnung

$$y^{(k)} = f(t, y, y', \dots, y^{(k-1)}).$$

kann in ein System erster Ordnung umgeschrieben werden:
Mit der Setzung

$$\begin{aligned} y_1 &= y & y_1' &= y_2 \\ y_2 &= y' & y_2' &= y_3 \\ &\vdots & &\vdots \\ y_{k-1} &= y^{(k-2)} & y_{k-1}' &= y_k \\ y_k &= y^{(k-1)} & y_k' &= f(t, y_1, \dots, y_k) \end{aligned}$$

erhält man für $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$ das System

$$\boxed{Y' = F(t, Y),}$$

wenn man

$$F(t, Y) = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_k \\ f(t, y_1) \end{bmatrix}$$

setzt.

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k \cdot d} \to \mathbb{R}^{k \cdot d}$$

$$\dot{y}(t) = f(t,y)$$
$$\dot{y}(t) = \tilde{f}(y) = f(t,y)$$

Definition 2.3
Hängt die rechte Seite f nicht explizit von t ab, so heißt die Differentialgleichung autonom.

Definition 2.3
Hängt die rechte Seite f nicht explizit von t ab, so heißt die Differentialgleichung autonom.

Jede nichtautonome DGL
$$y' = f(t,y)\ , \quad y(t_0) = y_0$$
ist äquivalent zu einem autonomen System
$$\boxed{Y' = F(Y)} \text{ mit } Y = \begin{bmatrix} y \\ t \end{bmatrix} \text{ und } F(Y) = \begin{bmatrix} f(t,y) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t,y) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Definition 2.4

Eine stetig(e) Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ heißt(t, y) lokal Lipschitzstetig in der zweiten Komponenten, falls für $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt eine Konstante L (Lipschitzkonstante) existiert so, dass

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq L \, \underbrace{\|y - z\|}_{\text{Norm in } \mathbb{R}^d} \qquad \forall (t, y), (t, z) \in K. \tag{1}$$

Definition 2.4

Eine stetig Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ heißlokale Lipschitzstetig in der zweiten Komponenten, falls für $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt eine Konstante L (Lipschitzkonstante) existiert so, dass

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq L \, \|y - z\| \qquad \forall (t, y), (t, z) \in K. \tag{1}$$

Die lokale Lipschitz-Bedingung (1) ist erfüllt, falls f stetig differenzierbar ist und zwar mit $L = \max_{(t,y) \in K} \{\|f_y(t, y)\|\}$.

Matrixnorm

Ableitung von $f(t, y)$ nach y

$$\left\{ \begin{bmatrix} \partial/\partial y_1 \\ \vdots \\ \partial/\partial y_d \end{bmatrix} f \right\} = \nabla_y \underbrace{f(t, y)}_{\mathbb{R}^d} \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

nicht so schreiben

Satz 2.5 (Lokale Existenz und Eindeutigkeit)

*Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall
$f : I \times U \to \mathbb{R}^d$ stetig und in der zweiten Komponente lokal Lipschitzstetig. Dann gibt es zu $y_0 \in U$ und $t_0 \in I$ ein $\delta > 0$ und eine auf $I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ definierte stetige Funktion $y : I_\delta \to \mathbb{R}^d$ so, dass*

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \qquad \text{für } t \in I \qquad \text{und} \qquad y(t_0) = y_0.$$

gilt und insbesondere y auf I_δ differenzierbar ist.

Satz 2.5 (Lokale Existenz und Eindeutigkeit)

*Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall
$f : \underbrace{I \times U} \to \mathbb{R}^d$ stetig und in der zweiten Komponente lokal Lipschitzstetig. Dann gibt es zu $y_0 \in U$ und $t_0 \in I$ ein $\delta > 0$ und eine auf $I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ definierte stetige Funktion $y : I_\delta \to \mathbb{R}^d$ so, dass*

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \qquad \text{für } t \in I \qquad \text{und} \qquad y(t_0) = y_0.$$

gilt und insbesondere y auf I_δ differenzierbar ist.
Die Lösung kann bis an den Rand von U fortgesetzt werden, d.h. für alle $K \subset \overset{I\times}{U}$ kompakt mit $(t_0, y_0) \in K$ existiert ein $t_1 > t_0$ so, dass die Lösung des Anfangswertproblems auf $[t_0, t_1]$ existiert mit $(t_1, y(t_1)) \notin K$.

Satz 2.5 (Lokale Existenz und Eindeutigkeit)

Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall
$f : I \times U \to \mathbb{R}^d$ stetig und in der zweiten Komponente lokal Lipschitzstetig. Dann gibt es zu $y_0 \in U$ und $t_0 \in I$ ein $\delta > 0$ und eine auf $I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ definierte stetige Funktion $y : I_\delta \to \mathbb{R}^d$ so, dass

DGL

$$\overbrace{\dot{y}(t) = f(t, y(t)),} \qquad \text{für } t \in I \qquad \text{und} \qquad y(t_0) = y_0.$$

gilt und insbesondere y auf I_δ differenzierbar ist.
Die Lösung kann bis an den Rand von U fortgesetzt werden, d.h. für alle $K \subset U$ kompakt mit $(t_0, y_0) \in K$ existiert ein $t_1 > t_0$ so, dass die Lösung des Anfangswertproblems auf $[t_0, t_1]$ existiert mit $(t_1, y(t_1)) \notin K$.

Beweis.

$y \in C(I, \mathbb{R}^d)$

Idee: Picardoperator: $y \mapsto Ty$ $\boxed{(Ty)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds}$ $\forall t \in I$

T ist Kontraktion

Banachscher Fixpunktsatz

Fixpunkt ist Lösung (Details Ana II) <— Arbeit

Quadraturformel für Approximation

$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds$ ← Integralgleichung □

Beispiel 2.6

Die rechte Seite der DGL

$$y' = y^2, \qquad y(0) = 1, \qquad U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

ist lokal Lipschitz-stetig, erfüllt also die Voraussetzungen von Picard Lindelöf (Satz 2.5).
Die eindeutige Lösung $y(t) = (1 - t)^{-1}$ existiert auf dem offenen Intervall $I = (-\infty, 1)$ und $t_0 = 0 \in I$.
Es ist jedoch $\lim_{t \nearrow 1} y(t) = +\infty$.

$y(t) = \frac{1}{1-t}$ $\qquad y'(t) = \frac{-1(-1)}{(1-t)^2} = \frac{1}{(1-t)^2} = \left(\frac{1}{1-t}\right)^2 = (y(t))^2$

$y(0) = \frac{1}{1} = 1$ $\qquad$ ✓

Lemma 2.7 (Gronwall 1877-1932)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $u : I \to \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+ = \{x \in R : x > 0\}$) setigt so, dass für $\alpha, \beta > 0$, $t_0 \in I$ und alle $t \in I$ mit $t \geq t_0$

$$u(t) < \alpha + \beta \int_{t_0}^{t} u(s)ds$$

gilt. Dann ist

$$\underline{u(t) \leq \alpha e^{\beta(t-t_0)}}$$