

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 9. Übungsblatt

Aufgabe 31:

Bestimmen Sie den Stabilitätsbereich der Trapezregel

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f_{n+1} + f_n)$$

und skizzieren Sie ihn in der komplexen Ebene.

Aufgabe 32:

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vollziehen Sie an diesem Beispiel die Aussage des oberen Diagramms aus Bemerkung (5.5)(iii) der Vorlesung nach: Finden Sie eine Transformationsmatrix T so, dass $T^{-1}AT = \Lambda$ mit Λ diagonal gilt. Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = Ay$ exakt, und geben Sie die Lösungsvorschriften sowohl des expliziten als auch des impliziten Eulerverfahrens an. Wenden Sie dann die Transformation $z = T^{-1}y$ auf die numerischen Löser an.

Leiten Sie andererseits die Vorschrift der beiden Eulerverfahren für die transformierte DGL $z' = \Lambda z$ her und vergleichen Sie die dabei entstandenen Verfahren (vgl. Aufgabe 23).

Aufgabe 33:

Beweisen Sie Satz 3 aus (5.7):

Ist $\text{ggT}(\rho, \sigma) = 1$ und ist $\sigma(\zeta) = 0$ für ein ζ mit $|\zeta| > 1$, so ist \mathcal{S} beschränkt.

Aufgabe 34:

Zeigen Sie, dass alle irreduziblen Zweischrittverfahren der Ordnung 2 durch

$$\rho(\zeta) = (\zeta - 1)(\alpha(\zeta - 1) + 1), \quad \sigma(\zeta) = (\zeta - 1)^2\beta + (\zeta - 1)\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) + 1$$

mit geeigneten Koeffizienten α, β , wobei $\alpha \neq 2\beta$, gegeben sind.

Hinweis: Für Verfahren mit Ordnung 2 gilt $\rho(e^h) - h\sigma(e^h) = \mathcal{O}(h^3)$, $h \rightarrow 0$ (Taylor-Entwicklung von e^h).

Bei Mehrschrittverfahren kommt es nicht auf die Skalierung der Polynome an, obige sind nicht wie in der Vorlesung skaliert.

Zur Definition: Ein Verfahren ist irreduzibel, wenn $\text{ggT}(\sigma, \rho) = 1$, d.h. wenn σ und ρ keine gemeinsamen Wurzeln besitzen. Diese Definition gilt sowohl für explizite als auch implizite Verfahren.

**Abgabe der Übungsaufgaben bis Mittwoch, 24.06.2020, 9:00 Uhr über ILIAS.
Besprechung in der Übung am selben Tag.**