Heinrich Heine Universität Düsseldorf
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Marina Fischer
10.06.2020

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 8. Übungsblatt

Aufgabe 27:

Untersuchen Sie die folgenden linearen Mehrschrittverfahren auf Konvergenz und bestimmen Sie, falls konvergent, die Konvergenzordnung. Nehmen Sie jeweils an, dass die Startwerte passend gewählt werden.

(a) $y_{n+2} = \frac{1}{2} y_{n+1} + \frac{1}{2} y_n + 2h f_{n+1}$

(b) $y_{n+1} = 2y_n$

(c) $y_{n+4} = y_n + \frac{4}{3} h \left(f_{n+3} + f_{n+2} + f_{n+1}\right)$

(d) $y_{n+3} = -y_{n+2} + y_{n+1} + y_n + 2h\left(f_{n+2} + f_{n+1}\right)$

Aufgabe 28:

Zeigen Sie, dass alle Nullstellen von $\rho(\zeta)$ eines stabilen, symmetrischen Mehrschrittverfahrens auf dem Einheitskreis liegen.

Hinweis: Nach Aufgabe 24 ist ein Mehrschrittverfahren symmetrisch, wenn $\alpha_{k-j} = -\alpha_j$ und $\beta_{k-j} = \beta_j$ für $j = 0, \ldots, k$ gilt. Zeigen Sie, dass daraus $\rho(\zeta) = -\zeta^k \rho(\zeta^{-1})$ folgt.

Aufgabe 29:

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von Satz (4.10), dass ein MSV genau dann die Ordnung p hat, wenn

$$\frac{\rho(\zeta)}{\log(\zeta)} - \sigma(\zeta) = \mathcal{O}((1-\zeta)^p) \quad \text{für } \zeta \to 1.$$

(b) Es sei ρ vom Grad $\leq k$ mit $\rho(1) = 0$. Zeigen Sie mit (a): Es gibt genau ein Polynom σ vom Grad $\leq k$, so dass die Ordnung des zugehörigen Mehrschrittverfahrens mindestens $k+1$ ist.

Aufgabe 30:

(a) Implementieren Sie das implizite Eulerverfahren. Lösen Sie dabei das nichtlineare Gleichungssystem mit Hilfe des Newton-Verfahrens.

(b) Wenden Sie sowohl das explizite als auch das implizite Eulerverfahren auf das Räuber-Beute Modell

$$\begin{cases} \dot{r}(t) &= -2r(t) + r(t)b(t) \\ \dot{b}(t) &= b(t) - r(t)b(t) \end{cases}$$

mit Startwerten $r(0) = 1$ und $b(0) = 1.5$ an. Verwenden Sie dazu eine relativ große Schrittweite und stellen Sie das Ergebnis graphisch dar.

Abgabe der Übungsaufgaben bis Mittwoch, 17.06.2020, 9:00 Uhr über ILIAS.
Besprechung in der Übung am selben Tag.