Heinrich Heine Universität Düsseldorf
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Marina Fischer

03.06.2020

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 7. Übungsblatt

Aufgabe 23:

Zeigen Sie, dass Runge-Kutta- und Mehrschrittverfahren invariant unter linearen Transformationen $y = Tz$ sind, d.h. wendet man das Verfahren auf $y' = f(t, y)$ und auf $z' = T^{-1}f(t, Tz)$ mit Anfangsbedingungen $y_0 = Tz_0$ (RKV) bzw. $y_j = Tz_j$, $j = 0, \ldots, k-1$ (MSV), so gilt $y_1 = Tz_1$ bzw. $y_k = Tz_k$.

Aufgabe 24:

Man nennt ein Mehrschrittverfahren symmetrisch, falls

$$\alpha_{k-i} = -\alpha_i \ , \quad \beta_{k-i} = \beta_i$$

für $i = 0, 1, \ldots, k$ gilt.

Zeigen Sie, dass die (maximale) Ordnung eines symmetrischen Mehrschrittverfahrens immer gerade ist.

Aufgabe 25:

(a) Zeigen Sie durch Induktion nach j (wobei $j \leq k$), dass für die Folge $z_k = \zeta^k$, $k = 0, 1, \ldots$ gilt:

$$\nabla^j z_k = \zeta^k \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^j$$

(b) Zeigen Sie damit, dass für implizite Adams-Verfahren

$$\rho(\zeta) = \zeta^k \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right), \qquad \sigma(\zeta) = \zeta^k \sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^j$$

und für BDF-Verfahren, gegeben durch $\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \nabla^j y_{n+k} = h f_{n+k}$,

$$\rho(\zeta) = \zeta^k \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^j, \qquad \sigma(\zeta) = \zeta^k$$

gilt.

Aufgabe 26:

Beweisen Sie die Dahlquist'sche Wurzelbedingung (Satz (4.14) der Vorlesung):

Ein Mehrschrittverfahren ist genau dann stabil (0-stabil), falls für die Nullstellen (Wurzeln) λ von ρ gilt:

$$|\lambda| \leq 1 \ \text{ und } \ (|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda \text{ ist einfache Nullstelle}).$$

Tipp: Sehen Sie sich Beispiel (4.12) oder den Beweis von Satz (4.20) an.

Abgabe der Übungsaufgaben bis Mittwoch, 10.06.2020, 9:00 Uhr über ILIAS.
Besprechung in der Übung am selben Tag.