Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

27.05.2020

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 6. Übungsblatt

Aufgabe 19:

Zeigen Sie: Ist

$$a_{s+1-i,s+1-j} + a_{ij} = b_j = b_{s+1-j}, \quad c_i + c_{s+1-i} = 1, \qquad i, j = 1, \ldots, s,$$

so ist das durch a_{ij}, b_i, c_i definierte, s-stufige Runge-Kutta-Verfahren symmetrisch.

Aufgabe 20:

Es sei f global Lipschitz-stetig in der zweiten Komponente mit Lipschitz-Konstante L. Zeigen Sie, dass der lokale Fehler sowohl des

(a) impliziten Euler-Verfahrens

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n + h, y_{n+1})$$

(b) als auch der impliziten Mittelpunktregel

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \tfrac{h}{2}, \tfrac{1}{2}(y_n + y_{n+1})\right)$$

durch einen Term der Form

$$\frac{\mathcal{O}(h^p)}{1 + Ch^q} \in \mathcal{O}(h^p), \quad p, q \in \mathbb{N}_0,\ C > 0$$

abgeschätzt werden kann. Was sind jeweils p und q?

Aufgabe 21:

Es werde $f(t, y(t))$ durch das Interpolationspolynom p durch die Punkte

$$(t_{n-k+1}, f_{n-k+1}), \ldots, (t_n, f_n), \qquad f_j := f(t_j, y_j), \qquad t_j = t_0 + h \cdot j$$

interpoliert. Zeigen Sie mit Hilfe der Newton'schen Interpolationsformel die Darstellung

$$p(t) = p(t_n + \tau h) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{-\tau}{j} \nabla^j f_n.$$

Hierbei sind Rückwärtsdifferenzen $\nabla^j f_n$ rekursiv definiert durch

$$\nabla^0 f_n = f_n, \qquad \nabla^{j+1} f_n = \nabla^j f_n - \nabla^j f_{n-1}$$

und der im oberen Argument kontinuerliche Binomialkoeffizient durch

$$\binom{\tau}{j} = \frac{1}{j!} \prod_{k=0}^{j-1} (\tau - k).$$

Aufgabe 22:

Zeigen Sie, dass das k-Schritt BDF-Verfahren die Ordnung $p = k$ hat.

Abgabe der Übungsaufgaben bis Mittwoch, 03.06.2020, 9:00 Uhr über ILIAS.
Besprechung in der Übung am selben Tag.