Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

13.05.2020

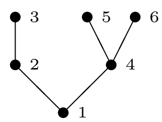
Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 4. Übungsblatt

Aufgabe 14:

Überlegen Sie sich, dass es für jeden Baum $\tau \in \mathcal{T}$ ein System erster Ordnung $y' = f(y)$ mit $f : \mathbb{R}^{|\tau|} \to \mathbb{R}^{|\tau|}$ und Anfangswert $y_0 = 0$ gibt, so dass für die erste Komponente F^1 des elementaren Differentials gilt:

$$F^1(\tau)(y_0) \neq 0 \qquad \text{und} \qquad F^1(\widetilde{\tau})(y_0) = 0 \qquad \text{für alle } \widetilde{\tau} \in \mathcal{T},\ \widetilde{\tau} \neq \tau$$

Hinweis: Zu dem Baum



gehört das System

$$(y^1)' = y^2 y^4, \quad (y^2)' = y^3, \quad (y^3)' = 1, \quad (y^4)' = y^5 y^6, \quad (y^5)' = 1, \quad (y^6)' = 1.$$

Aufgabe 15:

(a) Bestimmen Sie die Ordnung des klassischen, vierstufigen Runge-Kutta-Verfahrens.

(b) Konstruieren Sie mit den Koeffizienten des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens ein geschachteltes Tableau, so dass das resultierende Verfahren um die Ordnung 1 geringer ist.

Aufgabe 16:

Jedes Runge-Kutta-Verfahren kann in der Form

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h)$$

mit einer geeigneten Funktion Φ geschrieben werden. Gilt auch

$$y_n = y_{n+1} - h\Phi(t_n + h, y_{n+1}, -h),$$

(ein Schritt mit Schrittweite $-h$ führt zu y_n zurück), so heißt das Verfahren symmetrisch.

Zeigen Sie:

(a) Das explizite Eulerverfahren ist nicht symmetrisch.

(b) Die implizite Mittelpunktsregel $y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1}))$ ist symmetrisch.

Aufgabe 17:

Schreiben Sie ein adaptives Programm, welches ein Anfangswertproblem mit der 3/8-Regel löst und die Schrittweiten adaptiv anpasst:
Implementieren Sie dazu eine Funktion `rkv_core(f, tn, yn, hn)`, welche einen Schritt des RKV ausführt, als Parameter die rechte Seite $f(t, y)$, den Zeitpunkt t_n, den zugehörigen Wert y_n und die aktuelle Schrittweite h_n annimmt und den neuen Wert y_{n+1} sowie eine Schätzung $[\epsilon]$ für den Fehler zurückliefert. Verwenden Sie dabei den auf einem eingebetteten geschachtelten Verfahren basierenden Fehlerschätzer aus der Vorlesung mit $c = 1$ (siehe Bsp. nach (3.25)).
Schreiben Sie dann eine Funktion `RKV_adaptiv(f, tspan, y0, Tol, r, q, rho)` mit einer Schleife, die durch Aufruf von `rkv_core` das AWP über das gesamte gegebene Intervall $tspan = [t_0, t_{\text{end}}]$ löst. Benutzen Sie für die Aktualisierung der Schrittweite statt (3.24) 6) die Formel

$$\mathtt{h} = \mathtt{h_j} \cdot \min\left(\mathtt{q}, \max\left(\mathtt{r}, \left(\frac{\rho\,\mathtt{Tol}}{\|[\epsilon]\|}\right)^{1/(p+1)}\right)\right),$$

wobei Sie $\mathtt{r} = 1/4$, $\mathtt{q} = 4$, $\mathtt{Tol} = 10^{-4}$, $\rho = 0.9$ und $h_0 = (t_{\text{end}} - t_0)/100$ wählen. Für die 3/8-Regel gilt $p = 4$.

Testen Sie dieses Programm mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 0$ am

(a) Harmonischen Oszillator $y'' = -y$

(b) Mathematischen Pendel $y'' = \frac{g}{l}\sin(y)$, mit $g = 9.81ms^{-2}$ und $l = 0.5m$.

Plotten Sie die Lösungen bis zum Zeitpunkt $t_{\text{end}} = 10$ und auch die von Ihrem Programm verwendeten Schrittweiten.

Abgabe der Übungsaufgaben bis Mittwoch, 20.05.2020, 9:00 Uhr über ILIAS. Besprechung in der Übung am selben Tag.