

### Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 3. Übungsblatt

#### Aufgabe 10:

Beweisen Sie: Falls die rechte Seite  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  einer autonomen Differentialgleichung  $\dot{y} = f(y)$  eine globale Lipschitzbedingung erfüllt, d.h. falls

$$\|f(x) - f(z)\| \leq L\|x - z\| \quad \forall x, z \in \Omega$$

gilt, so genügt der numerische Fluß eines expliziten Runge-Kutta-Verfahrens der Lipschitzbedingung

$$\|\Psi^h(x) - \Psi^h(z)\| \leq \exp(hcL)\|x - z\| \quad \forall x, z \in \Omega,$$

wobei die Konstante  $c$  nur vom Runge-Kutta-Verfahren abhängt.

#### Aufgabe 11:

Zeigen Sie, dass ein explizites Runge-Kutta-Verfahren konsistent ist, falls  $\sum_{i=1}^s b_i = 1$  gilt.

**Hinweis:** In der vierten Vorlesung (vl4.pdf) finden Sie die korrigierte Version von Definition (3.8). Sie können annehmen, dass  $f$  glatt genug ist.

#### Aufgabe 12:

Zeigen Sie Lemma (3.13): Für ein explizites  $s$ -stufiges Runge-Kutta-Verfahren mit Ordnung  $p$  gilt, dass  $p \leq s$ .

**Hinweis:** Betrachten Sie die einfache Testgleichung  $\dot{y}(t) = y(t)$ ;  $y(0) = 1$ .

#### Aufgabe 13:

Schreiben Sie alle Ordnungsbedingungen für Runge-Kutta-Verfahren bis zur Ordnung 5 auf (in (3.20) sind bereits alle Bedingungen für Ordnung 4 angegeben) und ergänzen Sie so die Tabelle (3.22) aus der Vorlesung.

**Abgabe der Übungsaufgaben bis Mittwoch, 13.05.2020, 9:00 Uhr über ILIAS. Besprechung in der Übung am selben Tag.**