Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 11. Übungsblatt

Aufgabe 39:

Beweisen Sie Lemma 2 aus Abschnitt (5.12) der Vorlesung: Für die Stabilitätsfunktion gilt

$$R(z) = \frac{\det(I - z\mathfrak{A} + zeb^T)}{\det(I - z\mathfrak{A})}.$$

Aufgabe 40:

Überprüfen Sie, ob das Runge-Kutta-Verfahren aus Aufgabe 37 A-stabil ist.

Aufgabe 41:

Zeigen Sie, dass ein implizites Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung $p \geq s$ mit paarweise verschiedenen Knoten c_i genau dann ein Kollokationsverfahren ist, wenn

$$\sum_{j=1}^{s} b_j c_j^{q-1} = \frac{1}{q} \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_j^{q-1} = \frac{c_i^q}{q} \quad \text{für} \quad i, q = 1, \ldots, s \;\; \text{gilt.}$$

Aufgabe 42:

(a) Interpretieren Sie die implizite Mittelpunktsregel und das explizite Euler-Verfahren als Kollokationsverfahren.

(b) Ist die Trapezregel

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(f(t_0, y_0) + f(t_1, y_1)\right)$$

ein Kollokationsverfahren?

Aufgabe 43:

(a) Gegeben sei ein Kollokationsverfahren mit symmetrisch verteilten Knoten, d.h. $c_i = 1 - c_{s+1-i}$ für $i = 1, \ldots, s$. Zeigen Sie, dass für die Stabilitätsfunktion des Verfahrens gilt

$$R(z) \cdot R(-z) = 1 \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \quad \text{(mit Ausnahme der Pole).}$$

Insbesondere ist $|R(z)| \equiv 1$ auf der imaginären Achse.

(b) Gegeben sei ein Kollokationsverfahren mit $0 < c_1 < \cdots < c_s = 1$. Zeigen Sie, dass für die Stabilitätsfunktion des Verfahrens gilt:

$$\lim_{z \to \infty} R(z) = 0$$

Hinweise: Siehe nächste Seite.

Hinweise: zu (a): Zeigen Sie

$$a_{ij} = b_j - a_{s+1-i,s+1-j}.$$

Was bedeutet das in Matrixschreibweise?

zu (b): Nehmen Sie $t_0 = 0$ und $h = 1$ an und zeigen Sie

$$R(z) = \frac{M^{(s)}(1) + M^{(s-1)}(1)z + \ldots + M(1)z^s}{M^{(s)}(0) + M^{(s-1)}(0)z + \ldots + M(0)z^s} \quad \text{für} \quad M(x) = \prod_{j=1}^{s}(x - c_j),$$

indem Sie aus $u'(c_j) - zu(c_j) = 0$ eine Darstellung für $u^{(k)}(x)$ mit Hilfe von $M(x)$ herleiten.

Abgabe der Übungsaufgaben bis Mittwoch, 08.07.2020, 9:00 Uhr über ILIAS.
Besprechung in der Übung am selben Tag.