Analysis I

§ 1 (Etwas) Logik

(1.1) Aussagenlogik

Mathematische Aussage
= Aussage, die eindeutig
entweder wahr (w) oder
falsch (f) ist

"=" ist gleich

w und f sind
die zwei Wahrheitswerte

Mathematische Aussagen werden durch
Junktoren, die durch Wahrheitstafeln
definiert werden, verbunden

(1.2) Einstellige Junktoren

i) Die Negation (non-Junktor)
in Zeichen $\neg$

A	$\neg A$
w	f
f	w

A mathematische Aussage

ii) die anderen weniger wichtigen
Junktoren sind

A	$*_1 A$
w	w
f	w

(Verum)

A	$*_2 A$
w	w
f	f

(Affirmation)

A	$*_3 A$
w	f
f	f

(Falsum)

(1.3) Zweistellige Junktoren

Notation: $J(A, B)$ oder $A J B$
soll die Anwendung des Junktors J auf die beiden Aussagen A und B bezeichnen

2 # zweistellige Junktoren 16

i) Die <u>Konjunktion</u> (und - Junktor)
in Zeichen $\wedge$

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

"A und B" ist wahr wenn A und B wahr sind.
Das logische und stimmt mit dem umgangssprachlichen und überein

ii) Die <u>Disjunktion</u> (oder - Junktor)
in Zeichen $\vee$

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

"A oder B" ist wahr wenn mindestens eine der Aussagen A oder B wahr ist.
Das logische oder entspricht nicht unbedingt der Umgangssprache

iii) <u>Die Implikation</u> (wenn dann - Junktor)

in Zeichen $\Rightarrow$

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Sprechweise:

"aus A folgt B"

oder

"A impliziert B"

Beachte: Das weicht von der Umgangssprache ab

"$A \Rightarrow B$" ist stets wahr wenn A falsch ist.

<u>Bsp</u> "Wenn Fortuna Düsseldorf in der Saison 2019/20 deutscher Meister ist, ist 5 eine gerade Zahl" ist eine wahre mathematische Aussage

(iv) Die <u>Äquivalenz</u>

in Zeichen $\Leftrightarrow$

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Sprechweise

"A äquivalent B"

"A genau dann wenn B"

"A dann und nur dann wenn B"

Es gibt noch 12 weitere z.B "entweder oder"

(1.4.) Formeln

Aussagenlogische Formel

= Aneinanderreihung von mathematischen Formeln mit Hilfe von Junktoren

Tautologie

= aussagenlogische Formel, die stets den Wahrheitswert wahr (w) annimmt, egal welche Wahrheitswerte die Eingangsaussagen haben.

Beispiel:

$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ doppelte Verneinung ist wahr

↑ Klammern sind wichtig

Umgangssprachlich kann die doppelte Verneinung etwas anderes bedeuten

"We don't need no education"

"Das macht kein Mensch nicht"

Beweis

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$	$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
w	f	w	w
f	w	f	w

$\square$

(5)

Satz

Die Aussage

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$$

ist eine Tautologie

Bemerkung 1

Das bedeutet, dass wir $A \leftrightarrow B$ mit Hilfe von "$\to$" und "$\wedge$" hätten definieren können anstatt in (1.3) (iv) eine Wahrheitstafel für "$\leftrightarrow$" anzugeben

Beweis des Satzes

A	B	$A \leftrightarrow B$	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$	$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \to B) \wedge (B \to A))$
w	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	w
f	w	f	w	f	f	w
f	f	w	w	w	w	w

$\square$

Bemerkung 2

Auch den Implikationsjunktor "$\to$" kann man mit Hilfe von "$\neg$" und "$\wedge$" beschreiben denn

$$(A \to B) \leftrightarrow ((\neg A) \vee B)$$

(1.5) Beweisprinzip der Kontraposition / Widerspruchsbeweis

<u>Satz</u>

Die folgende aussagenlogische Formel ist eine Tautologie

$$(A \to B) \leftrightarrow ((\neg B) \to (\neg A))$$

<u>Bemerkung</u>

"Falls A dann B" ist äquivalent zu "Aus nicht B folgt nicht A".

Das ist oft nützlich in Beweisen.

<u>Beweis</u>

A	B	$A \to B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \to \neg A$	$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$
w	w	w	f	f	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

$\square$