MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
DR. FABIAN KARWATOWSKI

19. JUNI 2020

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

27	28	29	30	Σ

NAME: __________________

MAT-NR.: __________________

GRUPPE: __________________

Analysis I – 9. Übungsblatt

Aufgabe 27: (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass für $M \subseteq \mathbb{R}$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) M ist abgeschlossen.

(b) Für jede konvergente Folge $(a_n)_n$ in M, d.h. $a_n \in M$ für alle n, gilt $\lim_{n\to\infty} a_n \in M$.

Aufgabe 28: (6 Punkte)

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie, dass ein $x \in [0, \frac{1}{2}]$ existiert mit $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$.

Aufgabe 29: (6 Punkte)

(a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $a < b$, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Zeigen Sie, dass f eine kleinste Nullstelle in (a, b) hat.

(b) Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ einen "Fixpunkt" x_0, d.h. $f(x_0) = x_0$, hat. Zeigen Sie, dass dies im Allgemeinen nicht richtig ist für stetige Funktionen von $(-1, 1)$ in sich.

Aufgabe 30: (2+4 Punkte) *

(a) Konvergiert die Folge $(a_n)_n$ mit $a_n = (-1)^n \sqrt[n]{n}$? Begründen Sie ihre Antwort.

(b) Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass f stetig ist.

Präsenzaufgabe 33:

Finden Sie Beispiele für Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, die stetig, aber nicht Lipschitzstetig sind. Finden Sie außerdem Beispiele für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die stetig, aber nicht gleichmäßig stetig sind.

Präsenzaufgabe 34:

Zeigen Sie, dass die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

unstetig in $x_0 = 0$ sind, das Produkt $f \cdot g$, sowie die Summe $f + g$ jedoch stetig auf $\mathbb{R}$ sind.

Präsenzaufgabe 35:

Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage

$$f \text{ ist stetig in } x_0 \Leftrightarrow |f| \text{ ist stetig in } x_0$$

b.w

*Mit $\star$ markierte Aufgaben sind typische Klausuraufgaben.

Präsenzaufgabe 36: ⋆

Im folgenden sind M und N nicht-leere Mengen und $A, B, C \subseteq M$. [wahr | falsch]

Fragenblock:

1. Es gilt: $A \cap B = ((A \cap C) \cap (B \cap C)) \cup ((A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C))$. [|]
2. Durch $m \sim n :\Leftrightarrow m \leq n + 1$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ definiert. [|]
3. Haben M und N jeweils drei Elementen, so ist jede surjektive Abbildung bijektiv. [|]
4. Die Linksinverse und die Rechtsinverse einer Funktion können verschieden sein. [|]
5. Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Dann gilt: $A \subseteq B \subseteq M \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$. [|]
6. Ist $f : M \to N$ eine injektive Abbildung, so gilt $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$. [|]

Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper mit 1 das neutrale Element bzgl. "+" und additivem neutralem Element 0.

Fragenblock:

7. In $(K, +, \cdot)$ gilt für alle $x \in K$, dass $0 \cdot x = x$. [|]
8. Ist $(K, +, \cdot, P)$ ein angeordneter Körper, so ist für alle $x, y \in K$, dass $x \cdot y \cdot x \cdot y \in P$. [|]
9. Sei $(K, +, \cdot, P)$ ein angeordneter Körper. Für $x, y \in K$ gilt: $|x-y| \leq |x-1| + |y-1|$. [|]

$(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ sind Folgen in $\mathbb{R}$.

Fragenblock:

10. Ist $(a_n)_n$ eine konvergente Folge und $(b_n)_n$ eine beschränkte Folge, so ist die Folge $(c_n)_n$ mit $c_n = a_n b_n$ konvergent. [|]
11. Ist $(a_n)_n$ eine konvergente Folge und $(b_n)_n$ eine beschränkte Folge, so ist die Folge $(c_n)_n$ mit $c_n = a_n b_n$ beschränkt. [|]
12. Ist $(a_n)_n$ eine konvergente Folge und $(b_n)_n$ eine beschränkte Folge, so ist die Folge $(c_n)_n$ mit $c_n = a_n + b_n$ konvergent. [|]
13. Ist $(a_n)_n$ eine Nullfolge und $(b_n)_n$ eine beschränkte Folge, so ist die Folge $(c_n)_n$ mit $c_n = a_n b_n$ eine Nullfolge. [|]

Fragenblock:

14. $\forall n \in \mathbb{N} : n > 5 \Rightarrow 2^n > 7 \cdot n$ [|]
15. $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \frac{n^2+1}{n-\frac{3}{2}} = \frac{4n^2-2n+2}{2n-3}$ [|]
16. Es gilt $\sum_{k=0}^{n} a_k b_n = \sum_{k=0}^{n} a_n b_k$. [|]
17. Die Reihe $\sum_{n=19}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{4n^5+2}$ divergiert. [|]
18. Es gilt $\limsup_{n\to\infty} (-1)^n (12 + \frac{-n}{3n^2+6}) = 12$ [|]
19. Für $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| > 5$ gilt $\Im(a^2) > \Im(a)$. ($\Im(a)$ ist der Imagninärteil von a.) [|]
20. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto f(x)$ mit $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{für } x < 1 \\ -4x & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$ ist stetig in $x = 1$. [|]

Abgabe der schriftlichen Übungsaufgaben bis Montag, 29. Juni, 8:00 Uhr in AUAS.
Besprechung der Präsenzaufgaben in den Übungen am 24. und 25. Juni.

⋆Mit ⋆ markierte Aufgaben sind typische Klausuraufgaben.