MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
DR. FABIAN KARWATOWSKI

12. JUNI 2020

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

22	23	24	25	26	Σ

NAME: ________________

MAT-NR.: ________________

GRUPPE: ________________

Analysis I – 8. Übungsblatt

Aufgabe 22: (6 Punkte)

Zeigen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$, dass folgende Gleichungen gelten:

(a) $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

(b) $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$

(c) $\sin(x) - \sin(w) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Bemerkung: Wenn man $\cos(z) := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz})$ und $\sin(z) := \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz})$ definiert, gelten die Gleichungen auch in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 23: (6 Punkte)

Der Sinus Hyperbolicus wird durch $\sinh(z) := \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}$ definiert, der Kosinus Hyperbolicus duch $cosh(z) := \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}$.

Bestimmen Sie eine (die) Reihendarstellung von $\sinh(z)$ und $\cosh(z)$ in der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Leiten Sie die Additionstheoreme von Sinus Hyperbolicus und Kosinus Hyperbolicus her:

(a) $\cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$

(b) $\sinh(z+w) = \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w)$

(c) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$

Aufgabe 24: (6 Punkte)

Es sei $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ die Menge der positiven Zahlen.

(a) Bestimmen Sie die Unstetigkeitsstellen der Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ : x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

(b) Zeigen Sie direkt mit der Stetigkeitsdefinition, dass $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ : x \mapsto \sqrt{x}$ in $x = 2$ stetig ist.

Aufgabe 25: (6 Punkte) ⋆

Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$: $n^2 \leq 3^n$.

Aufgabe 26: (6 Punkte) ⋆

Geben Sie Beispiele für Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit den folgenden Eigenschaften an:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert und $(a_n)_n$ ist eine Nullfolge,

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert,

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, aber konvergiert nicht absolut.

b.w

⋆Mit ⋆ markierte Aufgaben sind typische Klausuraufgaben.

Präsenzaufgabe 29:

Zeichnen Sie in der komplexen Zahlenebene für $z \in \{-1-2i, -2i, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\}$ jeweils

(a) $\overline{z}$

(b) $1-i+z$

(c) $(1+i)z$

(d) $\dfrac{1}{1+z}$

(e) z^2

(f) z^{-1}

Präsenzaufgabe 30: (Monotonie der Potenz)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y \geq 0$. Zeigen Sie, dass dann

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x^n \leq y^n.$$

gilt.

Präsenzaufgabe 31:

Zeigen Sie für $z, w \in \mathbb{C}$, dass folgende Gleichungen gelten:

(a) $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$

(b) $\cos(2z) = 2\cos^2(z) - 1$

(c) $\cos(z) - \cos(w) = -2\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z-w}{2}\right)$

Bemerkung: Für $z \in \mathbb{C}$ setzt man $\cos(z) := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz})$ und $\sin(z) := \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz})$. Dadurch kann man den in der Vorlesung definierten Sinus und Cosinus auf $\mathbb{C}$ geeignet fortsetzen.

Präsenzaufgabe 32:

Zeigen Sie direkt mit der Stetigkeitsdefinition, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (1+x)^2$ in $x = 1$ stetig ist.

Abgabe der schriftlichen Übungsaufgaben bis Montag, 22. Juni, 8:00 Uhr in AUAS.
Besprechung der Präsenzaufgaben in den Übungen am 17. und 18. Juni.