Mathematisches Institut

Prof. Dr. Achim Schädle
Dr. Fabian Karwatowski

29. Mai 2020

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

16	17	18	Σ

Name: ____________________

Mat-Nr.: ____________________

Gruppe: ____________________

Analysis I – 6. Übungsblatt

Aufgabe 16: (6 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert

(a) $a_n = \dfrac{n^3+3n-7}{n^3+n^2}$

(b) $a_n = \dfrac{n^4+2n^2+1}{n^3+4n^2+1}$

(c) $a_n = \dfrac{x^n-n}{x^n+n}$ in Abhängigkeit von $x>0$

(d) $a_n = \prod_{k=2}^{n} (1-\frac{1}{k^2})$

Aufgabe 17: (6 Punkte)

Entscheiden Sie für folgende Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ob $\liminf_{n\to\infty} a_n$, $\limsup_{n\to\infty} a_n$ bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n$ existieren, und bestimmen Sie gegebenenfalls diese Werte.

(a) $a_n = \begin{cases} -(1-\frac{1}{n}) & \text{falls } n=2^k \text{ für ein } k\in\mathbb{N} \\ (1-\frac{1}{n}) & \text{sonst} \end{cases}$

(b) $a_n = (-1)^n \frac{n^2}{2^n}$

Aufgabe 18: (6 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass falls für ein $n_0\in\mathbb{N}$ und ein $q\in\mathbb{R}$ mit $0\le q<1$ für $n\ge n_0$

$$|a_{n+1}-a_n| \le q|a_n-a_{n-1}|$$

erfüllt ist, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

Präsenzaufgabe 21:

Entscheiden Sie, ob die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert

(a) $a_n = 1+2^{-n}$

(b) $a_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2+5n+1}$

(c) $a_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$

Präsenzaufgabe 22:

Entscheiden Sie für folgende Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ob $\liminf_{n\to\infty} a_n$, $\limsup_{n\to\infty} a_n$ bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n$ existieren, und bestimmen Sie gegebenenfalls diese Werte.

(a) $a_n = \frac{1}{(-2)^n}$

(b) $a_n = (-1)^n\left(2-\frac{3}{n}\right)$

b.w

Präsenzaufgabe 23:

Für eine reelle Zahl $c > 0$ und $a_1 \in (0, \frac{2}{c})$ sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} = a_n(2 - ca_n).$$

Zeigen Sie, dass die Folge monoton wächst und durch $\frac{1}{c}$ beschränkt ist. Hat diese Folge einen Grenzwert? Welchen?

Präsenzaufgabe 24:

Beweisen Sie nur mit Hilfe der Definition für *konvergente Folge*:

Ist $(a_n)_n$ kovergent gegen a, so ist für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Folge $(\alpha a_n)_n$ konvergent gegen αa.

Abgabe der schriftlichen Übungsaufgaben bis Montag, 8. Juni, 8:00 Uhr in AUAS.
Besprechung der Präsenzaufgaben in den Übungen am 3. und 4. Juni.