Mathematisches Institut

Prof. Dr. Achim Schädle
Dr. Fabian Karwatowski

22. Mai 2020

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

13	14	15	Σ

Name: ________________

Mat-Nr.: ________________

Gruppe: ________________

Analysis I – 5. Übungsblatt

Aufgabe 13: (6 Punkte)

Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq n$ und, für $m-1 \leq k \leq n+1$, $a_k, b_k \in K$. Zeigen Sie folgende Identität.

$$\sum_{k=m}^{n} a_k(b_k - b_{k+1}) = a_{m-1}b_m - a_n b_{n+1} + \sum_{k=m}^{n}(a_k - a_{k-1})b_k.$$

Bemerkung: Diese Indentität wird auch als *Abelssche partielle Summation* oder kurz als *partielle Summation* bezeichnet.

Als Anwendung vereinfachen Sie

$$\sum_{k=1}^{n} k\left(\binom{n}{k} - \binom{n}{k+1}\right)$$

bis kein Summenzeichen mehr vorhanden ist.

Aufgabe 14: (6 Punkte)

Zeigen Sie folgenden Variante der Bernoulli Ungleichung: Für $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x \leq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$(1-x)^n \leq \frac{1}{1+nx}$$

Aufgabe 15: (6 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{N}_0$ sei $s_n(p) = \sum_{k=1}^{n} k^p$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion über n und mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes die Pascalsche Identität

$$\sum_{p=0}^{q} \binom{q+1}{p} s_n(p) = (n+1)^{q+1} - 1.$$

Folgern Sie daraus und mit Hilfe von Präsenzaufgabe 17 (b), dass $s_n(3) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ist.

Präsenzaufgabe 17:

Beweisen Sie durch vollständige Induktion :

(a) Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \qquad \text{(geometrische Summenformel)}$$

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

.

b.w

Präsenzaufgabe 18:

Sei M eine nicht-leere und nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass M dann ein eindeutiges Maximum besitzt.

Präsenzaufgabe 19:

Welche der folgenden Formeln für das Summen- bzw. Produktzeichen sind richtig. Begründen Sie Ihre Antwort

(a) $\sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$

(b) $\prod_{k=0}^n a_k b_k = \prod_{k=0}^n a_{n-k} b_k$

(c) $\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$

(d) $\prod_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \prod_{k=0}^n a_{n-k} b_k$

(e) $\sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^n a_{n-k} \sum_{k=0}^n b_k$

(f) $\prod_{k=0}^n a_k b_k = \prod_{k=0}^n a_{n-k} \prod_{k=0}^n b_k$

(g) $\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_{n-k} = \sum_{k=0}^n a_k b_k$

(h) $\sum_{k=m}^n (a_k + a_{k-l}) = \sum_{k=m-l}^n a_k + \sum_{k=m}^{n-l} a_k$

In der Teilaufgabe (h) sei $n > m$ und $l \in \mathbb{N}$ mit $l < n - m$.

Präsenzaufgabe 20:

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $\sum\limits_{i=1}^{n} (4i - 1) = 2n^2 + n,$

(b) $n^2 - 2n - 1 > 0$, falls $n \geq 3$,

(c) $\prod\limits_{i=1}^{n} 4^i = 2^{n^2+n}.$

Abgabe der schriftlichen Übungsaufgaben bis Dienstag, 2. Juni, 8:00 Uhr in AUAS.
Besprechung der Präsenzaufgaben in den Übungen am 27. und 28. Mai.