MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
DR. FABIAN KARWATOWSKI

3. JULI 2020

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

| 36 | 37 | 38 | 39 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

NAME: ________________
MAT-NR.: ________________
GRUPPE: ________________

# Analysis I – 11. Übungsblatt

**Aufgabe 36:** (6 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ die Ungleichungen

$$(y-x)\exp(x) < \exp(y) - \exp(x) < (y-x)\exp(y)$$

erfüllt sind.

**Aufgabe 37:** (6 Punkte)

In Abschnitt (5.4) wurde gezeigt, dass für $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{und} \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

gilt.

(a) Beweisen Sie, dass sin und cos differenzierbar auf $\mathbb{R}$ sind und zeigen Sie, dass $\sin'(x) = \cos(x)$ und $\cos'(x) = -\sin(x)$.

(b) Zeigen Sie, dass $x \mapsto \cos(x)$ im Intervall $(0, 2)$ eine Nullstelle besitzt.

(c) Man definiert $\frac{\pi}{2}$ als die erste Nullstelle von $\cos(x)$ im Intervall $(0, 2)$, d.h. $\cos(\pi/2) = 0$ und $\cos(x) > 0$ für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Zeigen Sie, dass $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

**Aufgabe 38:** (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Punkte, an denen die folgenden Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung

(a) $f(x) = x\ln(x^2) - x$

(b) $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$

(c) $f(x) = \frac{\cos(x^2)-1}{x}$

(d) $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$

(e) $f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} - 1$

(f) $f(x) = \frac{x-\sin(x)}{x^2}$

**Aufgabe 39:** (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass für eine Funktionenfolge $(f_n)_n$, $f_n : D \to \mathbb{R}$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) $(f_n)_n$ konvergiert gleichmäßig auf $D$ gegen $f$.

(b) $(f_n - f)_n$ ist eine Folge in $B(D, \mathbb{R})$ und $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$.

(Hierbei ist $||f||_\infty := \sup\{f(x) \ : \ x \in D\}$.)

**Präsenzaufgabe 41:**

Beweisen Sie: Für ein nicht-trivales Intervall $D = [a, b]$ und $f \in C^1(D)$ ist $f$ Lipschitz stetig.

**Präsenzaufgabe 42:**

Beweisen Sie: Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Koeffizienten $a_n$ so, dass $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, dann konvergiert für $x \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolut.

**Präsenzaufgabe 43:** $\star$

[ wahr | falsch ]

**Fragenblock:**

1. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+1}$ ist in $x = 1$ differenzierbar. [ | ]
2. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\exp(x)-1}{x}$ ist in $x = 0$ differenzierbar. [ | ]
3. Die Ableitung von $f(x) = \exp(-x^2)$ ist durch $f'(x) = 2\exp(-x^2)$ gegeben. [ | ]
4. Die Ableitung von $f(x) = \exp\left(-\frac{x}{x^2+1}\right)$ ist durch $f'(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\exp(-\frac{x}{x^2+1})$ gegeben. [ | ]
5. Sind für $n \in \mathbb{N}$ Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\exp(x)}{(2n+1)(x+1)}$ definiert, so konvergiert die Folge $(f_n)_n$ gleichmäßig. [ | ]
6. Sind für $n \in \mathbb{N}$ Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\exp(x)}{(2n+1)(x+1)}$ definiert, so konvergiert die Folge $(f_n)_n$ gleichmäßig. [ | ]
7. Sind für $n \in \mathbb{N}$ Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\exp(x)}{(2n+1)(x^2+1)}$ definiert, so konvergiert die Folge $(f_n)_n$ gleichmäßig. [ | ]

**Fragenblock:**

8. Jede auf $[0,1]$ gleichmäßig stetige Funktion ist stetig. [ | ]
9. Jede auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetige Funktion ist stetig. [ | ]
10. Jede auf $[0,1]$ stetige Funktion ist gleichmäßig stetig. [ | ]
11. Konvergiert eine Folge von beschränkten Funktionen $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen $f$, so ist $f$ beschränkt. [ | ]
12. Konvergiert eine Folge von Lipschitzstetigen Funktionen $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen $f$, so ist $f$ Lipschitzstetig. [ | ]

**Abgabe der schriftlichen Übungsaufgaben bis Montag, 13. Juli, 8:00 Uhr in AUAS.**
**Besprechung der Präsenzaufgaben in den Übungen am 8. und 9. Juli.**