Mathematisches Institut

Prof. Dr. Achim Schädle
Dr. Fabian Karwatowski

26. Juni 2020

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

31	32	33	34	35	Σ

Name: ____________

Mat-Nr.: ____________

Gruppe: ____________

Analysis I – 10. Übungsblatt

Aufgabe 31: (6 Punkte)

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist streng mononton wachsend, falls für $x, y \in I$ mit $x > y$ folgt $f(x) > f(y)$. Zeigen Sie, dass für ein nicht triviales Intervall $I = [a, b]$, (d.h. $a, b \in \mathbb{R}, a < b$) und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig:

(a) $f(I)$ beschränkt ist,

(b) ist f streng monoton wachsend auf I, so ist $f(I) = [f(a), f(b)]$,

(c) ist f streng monoton wachsend auf I, so ist $f^{-1} : f(I) \to I$ stetig.

Aufgabe 32: (6 Punkte) *

Sind die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 = 0$ differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitung $f'(x_0)$

(a) $f(x) = |x|\sqrt{|x|}$, (b) $f(x) = \cos(|x|^{2/3})$, (c) $f(x) = |x|^{|x|}$ (mit $0^0 = 1$).

Aufgabe 33: (6 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) (Verallgemeinerter Mittelwertsatz) Sind $f, g \ : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann gibt es $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

(b) (Regel von L'Hospital) Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Falls $\lim_{x\searrow a} f(x) = \lim_{x\searrow a} g(x) = 0$ und $\lim_{x\searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann existiert auch $\lim_{x\searrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\lim_{x\searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(c) Berechnen Sie $\lim_{x\searrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right)$

Aufgabe 34: (3 + 3 Punkte) *

(a) Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Ist f dann in jedem Fall differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Welche anderen stetigen Funktionen außer der Nullfunktion erfüllen diese Eigenschaft?

Aufgabe 35: (6 Punkte) *

Kann man die Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ stetig in 0 fortsetzen? Kann die stetige Forsetzung dann auch differenzierbar auf $\mathbb{R}$ sein?

b.w

*Mit $\star$ markierte Aufgaben sind typische Klausuraufgaben.

Präsenzaufgabe 37:

Zeigen Sie nur mit Hilfe der Definition aus (7.1), dass die Ableitung von $\frac{1}{x}$ durch $-\frac{1}{x^2}$ gegeben ist.

Präsenzaufgabe 38: Leibnizregel

Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei n-mal differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, dasss für die n-te Ableitung des Produkts von f und g gilt:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k} g^{(k)}$$

Präsenzaufgabe 39:

Sind die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitung.

(a) $f(x) = \sin(x^2)$, (b) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$, (c) $f(x) = \exp(|x|^2)$.

Präsenzaufgabe 40: *

Im Folgenden sind $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ Folgen in $\mathbb{R}$. [wahr | falsch]

Fragenblock:

1. Gilt für alle $m \in \mathbb{N}$, dass $\lim_{n\to\infty} a_{n+m} - a_n = 0$, so ist $(a_n)_n$ konvergent. [|]
2. Sind $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ beschränkt, so gilt $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup_{n\to\infty}(a_n) + \limsup_{n\to\infty}(b_n)$. [|]
3. Ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergent und $(b_n)_n$ beschränkt, so ist $\sum_{n=1}^\infty b_n a_n$ konvergent. [|]
4. Ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ absolut konvergent und $(b_n)_n$ eine Nullfolge, so ist $\sum_{n=1}^\infty b_n a_n$ konvergent. [|]

Im Folgenden sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Fragenblock:

5. Besitzt f in x_0 ein lokales Minimum, so ist f in x_0 differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = 0$. [|]
6. Besitzt f in x_0 ein lokales Minimum, so ist f in x_0 stetig. [|]
7. Ist f stetig und $f(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$ so gibt es ein $\varepsilon > 0$ so dass $f(x) \neq 0$ für alle $x \in B_\varepsilon(x_0)$. [|]
8. Ist f stetig differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$ so gibt es ein $\varepsilon > 0$ so dass $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in B_\varepsilon(x_0)$. [|]

Fragenblock:

9. Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ konvergiert gegen $\frac{4}{3}$. [|]
10. Die Reihe $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}$ konvergiert gegen 1. [|]
11. Jede Teilfolge einer beschränkten Folge ist konvergent. [|]
12. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cos(3x) = 3\cos^3(x) - 2\cos^2(x)$. [|]

Abgabe der schriftlichen Übungsaufgaben bis Montag, 6. Juli, 8:00 Uhr in AUAS.
Besprechung der Präsenzaufgaben in den Übungen am 1. und 2. Juli.