MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
DR. FABIAN KARWATOWSKI

13. 10. 2020

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Schriftliche Prüfung zur Analysis 1

Aufgabe 1: (1 + 1 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist A eine Teilmenge der Menge M und gilt für jede Teilmenge B von M, dass $A \cap B = A$ ist, so ist A die leere Menge.

(b) Ist A eine Teilmenge der Menge M und gilt für jede Teilmenge B von M, dass $A \cup B = B$ ist, so ist A die leere Menge.

Lösung 1:

Man wähle jeweils $B = \emptyset$ und verwendet

(a) $\emptyset = A \cap \emptyset = A$

(b) $A = A \cup \emptyset = \emptyset$

Alternative:

Widerspruchsbeweis: Wie oben muss man dann jeweils B so wählen, dass B kein oder zumindest ein Element von A nicht enthält.

Aufgabe 2: (1 + 1 Punkte)

Geben Sie jeweils ein Beispiel mit einer kurzen Begründung für Abbildungen mit folgender Eigenschaft an.

(a) $f : A \to B$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.

(b) $g : C \to D$ ist surjektiv, aber nicht bijektiv.

Lösung 2: Nur ein Beispiel:

(a) Wähle $A = \{1, 2\},\ B = \{1, 2, 3\}$ und setze $f(1) = 1,\ f(2) = 2$.

Dann ist $f : A \to B$ injektiv, aber nicht surjektiv, da $3 \in B$ kein Urbild hat.

(b) Wähle $C = \{1, 2\},\ D = \{1\}$ und setze $g(1) = g(2) = 1$.

Dann ist $g : C \to D$ surjektiv, aber nicht injektiv und somit auch nicht bijektiv.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für zwei logische Aussagen A und B die Aussage

$$(\neg A \to B) \land (\neg A \to \neg B) \to A$$

eine Tautologie ist.

Lösung 3: Mit Wahrheitstafeln

Zur Erinnerung: Die Implikation $C \to D$ hat Wahrheitswert falsch (f) genau dann, wenn C wahr (w) und D falsch (f) ist und ist sonst wahr.

C	D	$C \to D$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Daraus ergibt sich die folgende Wahrheitstafel

A	B	¬A	¬B	$\neg A \to B$	$\neg A \to \neg B$	$(\neg A \to B) \land (\neg A \Rightarrow \neg B)$	$((\neg A \to B) \land (\neg A \to \neg B)) \to A$
w	w	f	f	w	w	w	w
w	f	f	w	w	w	w	w
f	w	w	f	w	f	f	w
f	f	w	w	f	w	f	w

Alternative:

Man kann auch den Ausdruck $\neg A \to B) \land (\neg A \to \neg B)) \to A$ geeignet umformen.

Aufgabe 4: (4 + 2 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

gegen 1 konvergiert.

Lösung 4:

(a) Mittels vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1}$

Induktionsvoraussetzung (IV) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$

Induktionsschritt $n \to n + 1$: Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} + \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}$$
$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{n\cdot(n+2)+1}{(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

(b) Man verwende a) und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$$

.

Elegantere Alternative (zu a):

Man kann die Summe als Teleskopsumme schreiben und erhält dann

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Zu einer Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert man die Folge der Mittelwerte $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Beweisen Sie: Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, so konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

Lösung 5:

Wir zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein N existiert mit $|b_n - a| < \varepsilon$ für $n > N$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt nach Dreiecksungleichung

$$|b_m - a| = |\frac{1}{m}\cdot\sum_{k=1}^{m} a_k - a| = \frac{1}{m}\cdot|\sum_{k=1}^{m} a_k - ma| = \frac{1}{m}\cdot|\sum_{k=1}^{m}(a_k - a)| \le \frac{1}{m}\cdot\sum_{k=1}^{m}|a_k - a| \tag{1}$$

Da a_n gegen a konvergiert, gilt

$$\exists N_1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \;\forall\, n \ge N_1 \tag{2}$$

Dies liefert mit (1) für $m \ge N_1$

$$|b_m - a| \le \frac{1}{m}\cdot\sum_{k=1}^{m}|a_k - a| = \frac{1}{m}\cdot\sum_{k=1}^{N_1-1}|a_k - a| + \frac{1}{m}\cdot\sum_{k=N_1}^{m}|a_k - a| \tag{3}$$
$$\le \frac{1}{m}\cdot\sum_{k=1}^{N_1-1}|a_k - a| + \frac{m-N_1+1}{m}\cdot\varepsilon/2 \le \frac{1}{m}\cdot\sum_{k=1}^{N_1-1}|a_k - a| + \varepsilon/2 \tag{4}$$

Der Summand $\frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^{N_1-1} |a_k - a|$ wird für hinreichend großes m beliebig klein, d.h. wir finden ein N_2, sodass

$$\frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^{N_1-1} |a_k - a| < \varepsilon/2 \ \forall\, m \geq N_2 \tag{5}$$

Aus (3) und (5) folgt für alle $m \geq \max\{N_1, N_2\}$ die Abschätzung $|b_m - a| < \varepsilon$.

Aufgabe 6: (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{für } x \geq 1, \\ \frac{1}{n}, & \text{für } \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n} \text{ mit } n \in \mathbb{N}, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

gegeben. Beweisen Sie, dass die Funktion in $x_0 = 0$ stetig ist.

Lösung 6:

1. Lösung: Der links- und rechtsseitige Grenzwert von $f(x)$ für $x \to 0$ existieren und haben den Wert $0 = f(0)$.

Linksseitiger Grenzwert klar: $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$

Rechtsseitiger Grenzwert:
Wenn $x \to 0$ und $x > 0$, dann liegt x in Intervallen $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ mit wachsendem $n \to \infty$. Folglich geht $f(x) = \frac{1}{n}$ für solche $x \to 0, x > 0$ gegen $0 = f(0)$.

2. Lösung: ε - δ Kriterium zur Stetigkeit.

Wählt man zu vorgegebenen $\varepsilon > 0$ etwa $\delta = \frac{1}{\lceil \frac{2}{\varepsilon} \rceil}$, so erhält man an der Stelle 0 für $|x - 0| = |x| < \delta$

$$|f(x) - f(0)| = |f(x) - 0| = f(x) \leq \frac{1}{\lceil \frac{2}{\varepsilon} \rceil} \leq \frac{1}{\frac{2}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

da x in dem Intervall $(-\frac{1}{\lceil \frac{2}{\varepsilon} \rceil}, \frac{1}{\lceil \frac{2}{\varepsilon} \rceil})$ liegt. Damit ist f in 0 stetig.

Aufgabe 7: (4 Punkte)

Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann f konstant ist.

Lösung 7:

Für den Differenzenquotienten gilt

$$0 \leq \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq |x - y| \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}$$

Für jedes $y \in \mathbb{R}$ gilt nach dem Einschließungskriterium $\lim_{x \to y} \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| = 0$. Daher ist

$$f'(y) = \lim_{x \to y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = 0,$$

und damit f differenzierbar. Da die Ableitung 0 ist, ist f konstant.

Aufgabe 8: (2 + 2 Punkte)

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass dann auch die Funktion $|f| : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |f(x)|$ differenzierbar ist.

(b) Berechnen Sie die Ableitung von $\ln|f| : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(|f(x)|)$.

Hinweis: Mit ln wird der natürliche Logarithmus, die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, bezeichnet.

Lösung 8:

(a) Verwende: Die Verkettung von differenzierbaren Funktionen ist differenzierbar.
Äußere Funktion $|\ | : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ ist auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ differenzierbar (bei 0 jedoch nicht !)
Innere Funktion,f, ist differenzierbar. Wichtig : $f(x) \neq 0$.

(b) Verwende die zweimal die Kettenregel für die Verkettung der drei Funktionen $\ln(\cdot)$, $|\cdot|$ und $f(\cdot)$.
Die Ableitung der Betragsfunktion $|\cdot|$ auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$(|x|)' = \left\{\begin{matrix} 1, & \text{falls } x > 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{matrix}\right\} =: \operatorname{sign}(x)$$

Due Ableitung von $\ln(\cdot)$ auf $\mathbb{R}^+$ ist

$$\ln(x)' = \frac{1}{x}$$

Daraus folgt

$$(\ln(|f(x)|))' = \frac{1}{|f(x)|} \cdot (|f(x)|)' = \frac{1}{|f(x)|} \cdot \operatorname{sign}(f(x)) \cdot f(x)'$$

Aufgabe 9: (2 + 1 + 2 Punkte)

Stellen Sie fest, ob die folgenden Grenzwerte existieren. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert, oder begründen Sie warum kein Grenzwert existiert.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x^2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

(c) Für $n \in \mathbb{N}$: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$

Lösung 9:

(a) Verwende die Reihenentwicklung der Cosinusfunktion/Exponentialfunktion. Für $|x| \leq 1$:

$$\left|\frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2}\right| = \left|\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|x|^{2n}}{(2n)!} \leq |x|^4 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \leq |x|^4 \cdot \exp(1) -$$

Dies liefert den Grenzwert $-\frac{1}{2}$ in a).
(b) Es gilt nach der binomischen Formel

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

(c) Die geometrische Summenformel liefert

$$\frac{x^n-1}{x-1} = 1 + x + ... + x^{n-1}.$$

Da jeder der n Summanden für $x \to 1$ gegen 1 geht, ist der Grenzwert n.

Alternativ kann man die Regel von L'Hospital, eventuell mehrfach, verwenden.

Aufgabe 10: (13 Punkte)

Im Folgenden sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen. [wahr | falsch]

Fragenblock:

1. Gibt es ein C mit $|a_n| < C$ für $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. [|]
2. Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n > 0$ für $n \in \mathbb{N}$ gegen a, so ist $a > 0$. [|]
3. Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, so ist auch $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent. [|]
4. Hat die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau einen Häufungspunkt, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und konvergent. [|]
5. Hat die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau einen Häufungspunkt und ist beschränkt, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. [|]
6. Gilt für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dass $a_{n+1} < a_n$ für $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$. [|]
7. Konvergiert die Folge $(n^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. [|]

Fragenblock:

8. Die Exponentialfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(x)$ ist streng monoton wachsend. [|]
9. Jede differenzierbare, nach unten beschränkte, reellwertige Funktion besitzt ein lokales Minimum. [|]
10. Die Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig. [|]
11. Jede gleichmäßig stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist stetig. [|]
12. Jede stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig. [|]
13. Ist $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und ist $f(0) = f(1)$, so existiert ein $x \in [0,1]$ mit $f'(x) = 0$. (f' bezeichnet die Ableitung von f.) [|]

Lösung 10: