MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
DR. FABIAN KARWATOWSKI

21. 7. 2020

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Schriftliche Prüfung zur Analysis 1

Bitte folgende Angaben ergänzen und **DEUTLICH LESBAR** in Druckbuchstaben schreiben:

Name: .... Vorname: ....

Matrikel-Nr.: .... Studienfach: ....

Fachsemester: ....

Hiermit bestätige ich, dass ich zu dieser schriftlichen Prüfung zugelassen bin, da ich

☐ die Zulassung im SoSe 2020 erworben habe,

☐ an einer schriftlichen Prüfung zur Analysis 1 bei
.... im WS/SS .... teilgenommen, aber nicht bestanden habe,

☐ die Zulassung zur Prüfung im WS/SS .... erworben habe.

....
Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$
max. Punkte	4	3	6	4	5	6	3	6	12	49
err. Punkte										

Hinweise: WICHTIG !

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Vornamen, schreiben Sie mit Kugelschreiber oder Füller und nicht in rot.
- Wird in der Aufgabenstellung ein Beweis oder eine Begründung verlangt, so muss die Argumentation oder der Rechenweg nachvollziehbar sein.
- Lesen Sie alle Aufgaben zuerst durch und überlegen Sie sich mit welcher Aufgabe Sie beginnen wollen.
- Nehmen Sie sich Zeit für die Beantwortung der Wahr/Falsch Fragen. Für jede richtige Antwort in diesem Fragenteil gibt es einen Punkt.
- Vergessen Sie keine Aufgabe. Es sind insgesamt 9 Aufgaben.
- Viel Erfolg!

Vorname : Name:

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für eine beliebige Teilmenge A von M gilt

(a) $\emptyset \cup A = A$ und

(b) $\emptyset \cap A = \emptyset$.

Hierbei ist $\emptyset$ die leere Menge.

(a) Bewertung: Argument für $\emptyset \cup A \subseteq A$ (1p) und $A \subseteq \emptyset \cup A$ (1p).

Lösung:

Die leere Menge $\emptyset$ ist die Menge, für die für jedes x gilt $x \notin \emptyset$.

$$\begin{aligned} x \in A \cup \emptyset &\iff x \in A \vee x \in \emptyset && (1)\\ &\iff x \in A, \text{ da } x \in \emptyset \text{ immer falsch ist} && (2) \end{aligned}$$

(b) Bewertung und Lösung: Am besten geht es mit einem Widerspruchsweis mit der

Annahme $\emptyset \cap A \neq \emptyset$

dann enthält die linke Seite $\emptyset \cap A$ (mindestens) ein Element, da sie nicht leer ist. Dieses Elemente ist in $\emptyset$ (Widerspruch) (und in A nach der Definition von $\cap$). (2p)

Wenn man ganz ordentlich ist, macht man noch eine Fallunterscheidung:
1. Fall: $A = \emptyset$, dann ist nichts zu zeigen.
2. Fall Ist A nicht leer, diskutiert man die einzelnen Fälle, wie oben.
Fehlt die, ziehen wir keine Punkte ab.

Vorname : Name:

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Für Mengen A, B, C seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ bijektive Abbildungen. Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Verkettung $g \circ f : A \to C$ bijektiv ist.

Beweis:
Man zeigt, dass $f^{-1} \circ g^{-1}$ Links- und Rechtsinverse zu $g \circ f$ ist.
(1p) Idee
(1p) Rechnung Linksinverse und (1p) für Rechtsinverse

Alternative:
Man zeigt, dass $f \circ g$ surjektiv und injektiv sind.
(1p) Idee
(1p) Injektivität und (1p) Surjektivität

Vorname :   Name:

Aufgabe 3: (3 + 3 Punkte)

Es sei für $a > 0$ eine Folge $(a_n)_n$ wie folgt definiert:

$$a_1 = a + 1, \quad a_{n+1} = a_n \left(1 + \frac{a - a_n^2}{2a_n^2}\right)$$

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

(a) $a_n > 0$ und

(b) $a_n^2 > a$

gilt.
Hinweis: Aus der Bernoullischen Ungleichung erhält man:

$$\text{Für } x > -1 \text{ ist } (1+x)^2 \geq 1 + 2x.$$

Dieses Resultat können Sie zur Lösung der Aufgabe verwenden ohne es zu beweisen.

Beweis:

(a) Vollständige Induktion

- $n = 1$ klar (1p)
- $n \to n+1$ hinschreiben und feststellen, dass beide Faktoren $a_n + a$ und $\frac{1}{2a_n}$ positiv sind. (2p)

$$a_n \frac{2a_n^2 + a - a_n^2}{2a_n^2} = \frac{a_n + a}{2a_n}$$

(b) Man kann den Hinweis verwenden. Dann erhält man

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 \Big(1 + \underbrace{\frac{a - a_n^2}{2a_n^2}}_{x}\Big)^2 \geq a_n^2 (1 + 2\frac{a - a_n^2}{2a_n^2}) = (a_n^2 + a - a_n^2) = a.$$

Wir müssen den Fall $a_{n+1}^2 = a$ ausschliessen. Falls $a_{n+1}^2 = a$, so ist

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + a_{n+1}^2}{2a_n}.$$

Umformen und zweite binomische Formel ergibt

$$(a_n - a_{n+1})^2 = 0.$$

Es muss also schon $a_n = a_{n+1}$ gewesen sein. Induktiv erhält man, dass $a_j = a$ für $j = 1, \ldots, n+1$ im Widerspruch zu $a_1 = a + 1$.

Vorname :   Name:

Aufgabe 4: (2 + 2 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Folgen $(a_n)_n$ mit den unten angegeben a_n konvergieren.
Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert oder begründen Sie, warum die Folge nicht konvergiert.

(a) $a_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{falls } n = 2^k \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{n^2} & \text{sonst} \end{cases}$

(b) $a_n = \dfrac{n^4 + 2n^2 + 2}{n^2 - 2n + 2}$

Lösung

(a) konvergiert (1p), (da $|a_n| \leq \frac{1}{n}$). Grenzwert ist 0 (1p).

(b) konvergiert nicht (1p), da Zählerpolynom größeren Grad als Nennerpolynom hat (1p).

Vorname :   Name:

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto f(x)$ gelte $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass f stetig auf $\mathbb{R}$ ist. Ist f dann in jedem Fall differenzierbar? Begründen Sie die Antwort.

Lösung:
Beweis Stetigkeit: (2p)

f ist Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante 1 und damit stetig.
Alternative: $\epsilon - \delta$ Kriterium, wähle $\delta = \epsilon$.

f ist nicht immer differenzierbar (1p). Einfachstes Beispiel ist $f(x) = |x|$ (2p).

Vorname : Name:

Aufgabe 6: (3 + 3 Punkte)

Untersuchen Sie folgende Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto f(x)$ auf Stetigkeit.

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\exp(x)-1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{|x|} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

Lösung:

(a) Für $x \neq 0$ ist f Verkettung stetiger Funktionen. (1p)

Untersuchung in $x = 0$(2p):

f ist in 0 der Differenzenquotient von $\exp(x)$ und da exp differenzierbar ist, ist alles ok, da $\exp'(x)_{|x=0} = 1 = f(0)$. Alternativ: Anwendung der Reihendarstellung von exp. Hier sind wir bei der Argumentation großzügig.

(b) f ist nicht stetig (1p), da linker und rechter Grenzwert nicht übereinstimmt. (Jeweils 1 Punkt für linken und rechten Grenzwert)

Die stetige sinc Funktion hatten wir in den Übungen.

Vorname : Name:

Aufgabe 7: (3 Punkte)

Geben Sie eine Folge $(f_n)_n$ von Funktionen an, die punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert. (mit Begründung)

Lösung:
Da gibt es viele mögliche Beispiele zum Beispiel die in Aufgabe 9. 9. angegebene Funktion.

Vorname : Name:

Aufgabe 8: (3 + 3 Punkte)

(a) Geben Sie den Mittelwertsatz (der Differentialrechnung) an.

(b) Zeigen Sie, dass die Exponentialfunktion exp die einzige differenzierbare Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ x\mapsto f(x)$ mit $f'=f$ und $f(0)=1$ ist.

Anleitung: Sie können in (b) den Mittelwertsatz verwenden. Betrachten Sie dafür zu einer Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ x\mapsto f(x)$ die Funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ x\mapsto f(x)\exp(-x)$. Wenden Sie nun den Mittelwertsatz auf g an, um zu zeigen, dass g eine konstante Funktion ist.

Lösung:

(a) MWS: Es sei $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ eine Funktion, die auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ (1p) $a<b$ definiert und stetig ist. Außerdem sei die Funktion f im offenen Intervall (a,b) differenzierbar (1p). Dann gibt es $c\in(a,b)$ so dass

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

gilt (1p).

(b) Betrachte die Funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto f(x)\exp(-x)$. Dann gilt $g'(x)=(f'(x)-f(x))\exp(-x)=0$ für alle x. Damit ist g konstant und $g(0)=1$. (3p)

Alternative Beweise sind auch erlaubt. Der MWS muss nicht angewandt werden.

Vorname : Name:

Aufgabe 9: (12 Punkte)

Im Folgenden sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen. [wahr | falsch]

Fragenblock:

1. Jede divergente Folge ist unbeschränkt. [|]
2. Jede konvergente Folge ist beschränkt. [|]
3. Gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$, so ist $(a_n)_n$ eine Nullfolge. [|]
4. Gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt: $|a_n^2| < \varepsilon$, so ist $(a_n)_n$ eine Nullfolge. [|]
5. Ist eine Folge $(a_n)_n$ mit $a_n \in \mathbb{R}$ konvergent und beschränkt, so hat $(a_n)_n$ genau einen Häufungspunkt. [|]
6. Ist für alle $n \in \mathbb{N}$ $a_n \geq 0$ und $b_n \geq 0$ dann gilt: $\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) \leq (\limsup_{n\to\infty}(a_n))(\limsup_{n\to\infty}(b_n))$. [|]

Im Folgenden sind f, g und für $n \in \mathbb{N}$ f_n Abbildungen $D \to \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Fragenblock:

7. Sind die f_n für $n \in \mathbb{N}$ differenzierbar auf $D = (a, b)$ und konvergiert die Folge der $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen f, so ist f differenzierbar auf $D = (a, b)$. [|]
8. Sind die f_n für $n \in \mathbb{N}$ stetig auf $D = [a, b]$ und konvergiert die Folge der $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen f, so ist f stetig auf $D = [a, b]$. [|]
9. Ist $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + |nx|}$, so konvergiert f_n punktweise gegen f [|]
   mit $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

Fragenblock:

10. Die Exponentialfunktion $x \mapsto \exp(x)$ ist streng monoton wachsend. [|]
11. Die Ableitung von $f(x) = \exp(-2x^2 + x)$ ist durch $f'(x) = \exp(-2x^2 + x)(-2x + 1)$ gegeben. [|]
12. Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2(n+1)}$ konvergiert für $|x| < 1$ absolut. [|]