MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

28. MAI 2019

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 9. Übungsblatt

Aufgabe 34:

Sei $\Omega = \left\{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \leq 1, x \leq 0 \text{ oder } 0 \leq y\ \right\} \subseteq \mathbb{R}^2 \mathrel{\widehat{=}} \mathbb{C}$.

Überlegen Sie sich, dass $u(x,y) \mathrel{\widehat{=}} u(x+iy) = \operatorname{Im}(w(z)) = \operatorname{Im}(z^{2/3})$ die Differentialgleichung

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u(e^{i\varphi}) = \sin(\frac{2}{3}\varphi), & \varphi \in [0, 3/2\pi] \\ u = 0 & \text{sonst auf } \partial\Omega \end{cases}$$

erfüllt. Zeigen Sie weiterhin, dass ∇u auf Ω nicht beschränkt ist.

Aufgabe 35:

(a) Erweitern Sie die Implementierung von Aufgabe 24 (b) (die Musterlösung ist auf der Homepage) um eine Schleife, in der der Fehler in der L_2- und der H_1-Norm berechnet wird und das Gitter nach jedem Durchlauf gleichmäßig verfeinert wird, in dem Sie den Befehl `mesh.Refine()` verwenden. Für das erste Gitter soll hierbei `maxh=1` gesetzt werden, es sollte auch nicht mehr als viermal verfeinert werden. Vergleichen Sie jeweils in beiden Normen den Fehler bzgl. eines Gitters mit dem bzgl. des nächstfeineren Gitters.
Lassen Sie die Schleife auch mit Finiten Elementen höherer Ordnung durchlaufen.

(b) Wenden Sie das gleiche Vorgehen auf das Beispiel aus Aufgabe 34 an, gehen Sie dazu wie folgt vor:

 (i) Konstruieren Sie das Gebiet Ω. Achten Sie hierbei auf die Zerlegung von $\partial\Omega$ in Γ_1 und Γ_2 entsprechend den Randbedingungen, vgl. `Aufg24_Omega.py` auf der Homepage.

 (ii) Verändern Sie Ihre Implementierung von Teil (a) nun so, dass jetzt das Randwertproblem aus Aufgabe 34 gelöst wird. Auf der Homepage finden Sie dazu eine Python-Datei mit der Funktion `arg(x,y)`, die für die Polarkoordinaten-Darstellung der NGSolve - *CoefficientFunctions* `x` und `y` den Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ ausgibt.

 (iii) Verändern Sie die Ordnung der Finiten Elemente und vergleichen Sie die Fehler. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 36:

Zeigen Sie, dass der in der Vorlesung definierte Operator

$$L \;:\; H^1(\widehat{K}) \;\longrightarrow\; L^2(\widehat{K}), \quad v \;\longmapsto\; \int_0^1 v(t,0)\,\mathrm{d}t$$

ein linearer, stetiger Operator ist.

Aufgabe 37:

Beweisen Sie Lemma (4.5), d.h. zeigen Sie:

Unter den Voraussetzungen von Lemma (4.3) und falls $h/\rho <$ const. ist, gilt

$$\|v - \Pi v\|_{0,K} \leq C h^2 |v|_{2,K} \qquad \forall v \in H^2(K).$$

Besprechung in der Übung am Freitag, 07. Juni 2019.