MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

21. MAI 2019

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 8. Übungsblatt

Aufgabe 29:

Es sei $\widehat{K} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1,\ x, y \geq 0 \}$ das Referenzdreieck. Stellen Sie die Basisfunktionen der Finiten Elemente der Ordnung 4 auf dem Referenzdreieck dar. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Die Konstruktion einer Triangulierung von $\widehat{K}$ mit nur einem Dreieckselement finden Sie in der Datei `Aufg29_Dreieck.py` auf der Homepage.

(b) Erzeugen Sie die $(k+1)$-te Basisfunktion für ein k zwischen 0 und `fes.ndof` -1, indem Sie an die $(k+1)$-ste Stelle einer leeren Gitterfunktion den Wert 1 eintragen (analog zu Aufgabe 20(c)).

(c) Plotten Sie Ihre Basisfunktion mit Hilfe von `matplotlib.pyplot.plot_trisurf`. Die Auswertung einer Gitterfunktion `gfu` im Punkt `(x, y)` erhalten Sie hierbei über `gfu(mesh(x, y))` (vgl. "1.2 CoefficientFunctions" auf der NGS-Py-Homepage).

Aufgabe 30:

Zeigen Sie, dass die Finiten Elemente der Ordnung $p \in \mathbb{N}$ aus Abschnitt (1.9) eine Basis von $\mathbb{Q}_p$ bzw. $\mathbb{P}_p$ bilden.

Aufgabe 31:

(a) Sei $\widehat{K}$ das Referenzdreieck und K ein beliebiges Dreieck in $\mathbb{R}^2$. Leiten Sie aus den Koordinaten der Eckpunkte von K explizit eine affine Transformation her, also eine Abbildung $\boldsymbol{F} : \widehat{K} \to K$ der Form $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$, so dass $K = \boldsymbol{F}(\widehat{K})$.

(b) Wie können Sie für die Matrix $\boldsymbol{B}$ aus (a) garantieren, dass $\det(\boldsymbol{B}) > 0$?

(c) Übertragen Sie Ihre Vorgehensweise auf Tetraeder in $\mathbb{R}^3$.

(d) Gibt es zwischen allgemeinen Vierecken in $\mathbb{R}^2$ affine Transformationen? Falls nicht, geben Sie ein Gegenbeispiel an und finden Sie auch eine Klasse von Vierecken, für die solche Abbildungen stets existieren.

Aufgabe 32:

Beweisen Sie Proposition (1.14) aus der Vorlesung.

Aufgabe 33:

Überlegen Sie sich, dass die Quadraturformel

(a)
$$\sum_{i=1}^{3} b_i f(c_i),\ b_i = 1/6,\ i = 1, ..., 3,\ c_1 = (1/2, 0),\ c_2 = (0, 1/2),\ c_3 = (1/2, 1/2)$$

exakt für Polynome in $\mathbb{P}_2$ auf dem Referenzdreieck ist und

(b)
$$\sum_{i=1}^{4} b_i f(c_i),\ b_i = 1/4,\ i = 1, ..., 4,\ c_i = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

exakt für Polynome in $\mathbb{Q}_3$ auf dem Referenzquadrat ist.

Besprechung in der Übung am Freitag, 31. Mai 2019.