Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Marina Fischer

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

14. Mai 2019

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 7. Übungsblatt

Aufgabe 25:

Zeigen Sie: Für ein stw. C^1-berandetes Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ und g stetig, stw. C^1 auf Γ gibt es ein $u_0 \in H^1(\Omega)$, so dass gilt

$$\gamma(u_0) = g.$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 23.

Aufgabe 26:

Finden Sie geeignete Voraussetzungen, so dass das homogene Robin-Problem der Form

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ bu + \frac{\partial}{\partial n_A} u = 0 & \text{auf } \Gamma \end{cases}$$

für konstante $b \in \mathbb{R}$ (ggf. welche?) eine eindeutige Lösung besitzt.

Hinweis: L und $\frac{\partial}{\partial n_A} u$ sind wie in der Vorlesung definiert.

Aufgabe 27:

Für $K \subset \mathbb{R}^2$ offen sei

$$\mathbb{Q}_1(K) := \{v \in C(K) \mid v : (x,y) \mapsto a + bx + cy + dxy;\ a,b,c,d \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Sei $T = [0,1]^2$ das Einheitsquadrat und $\Sigma = \{$Punktauswertungen in den Ecken$\}$. Zeigen Sie, dass das Tripel $(T,\ \mathbb{Q}_1(T),\ \Sigma)$ ein Finites Element ist und bestimmen Sie die nodale Basis. (Dieses Element heißt "bilinear", weil die Formfunktionen linear auf jeder Kante sind.)

(b) Sei nun $\widetilde{\Sigma} = \{$Punktauswertungen in den Kantenmittelpunkten$\}$. Zeigen Sie, dass das Tripel $(T,\ \mathbb{Q}_1(T),\ \widetilde{\Sigma})$ kein Finites Element ist.

Aufgabe 28:

Sei $\widehat{K} = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1,\ x,y \geq 0\ \}$.

(a) Bestimmen Sie die nodale Basis des finiten Elementes $(\widehat{K},\ \mathcal{P}_{\widehat{K}},\ \Sigma_{\widehat{K}})$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\widehat{K}} &= \mathbb{P}_2 = \text{ Polynome vom Grad } \leq 2, \\ \Sigma_{\widehat{K}} &= \text{ Punktauswertungen in den Ecken und den Seitenmittelpunkten.} \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie die nodale Basis des finiten Elementes $(\widehat{K},\ \mathcal{P}_{\widehat{K}},\ \Sigma_{\widehat{K}})$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\widehat{K}} &= \mathbb{P}_3 = \text{ Polynome vom Grad } \leq 3, \\ \Sigma_{\widehat{K}} &= \text{ Punktauswertungen in } x_i,\ i = 1,...,10 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{array}{llll} x_1 = (0,0), & x_4 = (1,0), & x_7 = (2/3, 1/3), & x_{10} = (0,1). \\ x_2 = (1/3, 0), & x_5 = (0, 1/3), & x_8 = (0, 2/3), & \\ x_3 = (2/3, 0), & x_6 = (1/3, 1/3), & x_9 = (1/3, 2/3), & \end{array}$$

Besprechung in der Übung am Freitag, 24. Mai 2019.