Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Marina Fischer

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

07. Mai 2019

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 6. Übungsblatt

Aufgabe 21:

Sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < x^5\}$ und $\Gamma = (0,1) \times \{0\}$. In Abbildung 1 ist dieses Gebiet abgebildet. Zeigen Sie, dass für

$$u : \Omega \to \mathbb{R}, \quad u(x,y) := \frac{1}{x}$$

gilt $u \in H^1(\Omega)$, aber $u|_\Gamma \notin L^2(\Gamma)$.

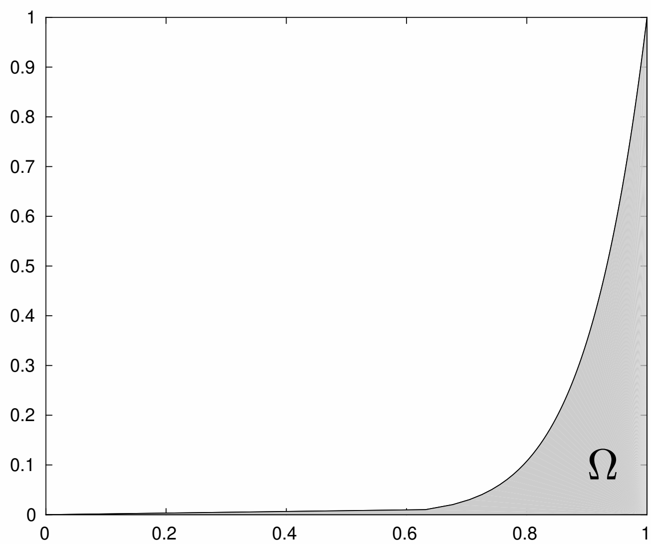

Abbildung 1: Gebiet Ω

Aufgabe 22:

Man definiert: $u \in L^2(\Omega)$ hat die *schwache Ableitung* $\partial_i u$ (für $i = 1, \dots, n$), falls $\partial_i u \in L^2(\Omega)$ und

$$(\varphi,\, \partial_i u)_0 = -(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i},\, u)_0 \qquad \text{für alle} \ \ \varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega}).$$

Weiterhin sei $u \in H^1(\Omega)$ und $(v_k)_k \to u$ in $H^1(\Omega)$ mit $v_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$, so bezeichnen wir mit dem L^2-Limes

$$\mathrm{D}_i\, u := \lim_{k\to\infty} \frac{\partial}{\partial x_i} v_k$$

die *verallgemeinerten Ableitungen* von u. Zeigen Sie für beschränkte stückweise C^1-Gebiete Ω:

(a) Für $u \in C^1(\overline{\Omega})$ ist die klassische Ableitung $\partial u / \partial x_i$ eine schwache Ableitung.

(b) Für $u \in H^1(\Omega)$ sind die verallgemeinerten Ableitungen schwache Ableitungen.

b.w.

Aufgabe 23:

Es sei eine Triangulierung eines beschränkten Gebietes $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine Funktion u, die auf jedem Dreieck C^1 ist, gegeben. Zeigen Sie:

$$u \in H^1(\Omega) \Longleftrightarrow u \in C(\overline{\Omega})$$

Hinweis: Aufgabe 22 (a).

Aufgabe 24:

(a) Lesen und verstehen Sie das Beispiel "1.3 Dirichlet boundary conditions" auf der NGS-Py-Homepage (ohne den letzten Teil "Using BVP"). Vergleichen Sie den beschriebenen Lösungsweg mit dem Beweis zu Satz 3.5.

(b) Verändern Sie das Beispiel nun so, dass das inhomogene Dirichletproblem

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 2\exp(y) & \text{in} \quad \Omega = [0,1]^2 \\ u = x(1-x)\exp(y) & \text{auf} \quad \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

gelöst wird.

(c) Auf der Vorlesungshomepage finden Sie die Datei `Aufg24_Omega.py`, in der ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ konstruiert wird, dessen Rand in die zwei Teilstücke Γ_1 und Γ_2 unterteilt ist. Lösen Sie das gemischte Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = \sin(x^2) & \text{in} \quad \Omega \\ u = (x+1)(y-1) & \text{auf} \quad \Gamma_1 \\ \partial_\nu u = \exp(x+y) & \text{auf} \quad \Gamma_2. \end{cases}$$

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie die Linearform für dieses Problem aussieht. Für deren Implementierung ist das Argument `definedon=...` hilfreich (siehe z.B. "1.5 Spaces and forms on subdomain").

Besprechung in der Übung am Freitag, 17. Mai 2019.