MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

30. APRIL 2019

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 5. Übungsblatt

Aufgabe 17:

Wir betrachten Lagrange-Finite-Elemente erster Ordnung auf dem Gebiet Ω aus Abbildung 1 mit der dort angegebenen Triangulierung. Bestimmen Sie unter Berücksichtigung der Vorüberlegungen in Aufgabe 15 für die Differentialgleichung aus Aufgabe 15 (b) die Steifigkeitsmatrix.

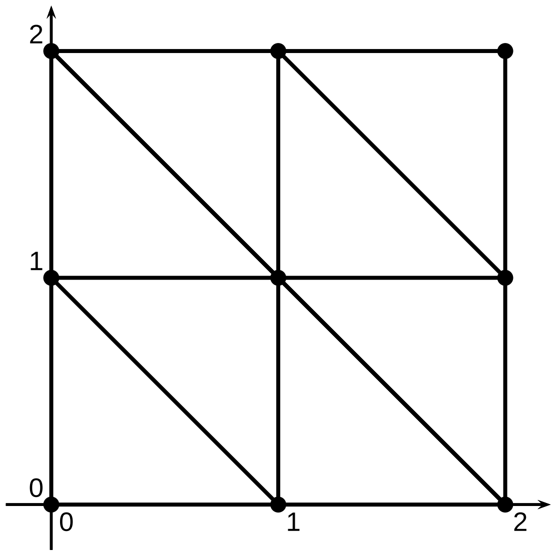

Abbildung 1: Gebiet mit Triangulierung für die Bestimmung der Steifigkeitsmatrix

Aufgabe 18:

(a) Zeigen Sie: Ist $\dim V < \infty$, dann gilt der Satz von Lax-Milgram auch, wenn man die Koerzivitätsbedingung durch die schwächere Voraussetzung $a(v, v) > 0$ für alle $v \neq 0$ ersetzt.

(b) Sei ℓ^2 der Raum der quadratisch summierbaren Folgen, d. h. $\ell^2 := \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots) \mid \|\boldsymbol{x}\|_{\ell^2} < \infty\}$, mit der Norm $\|\boldsymbol{x}\|_{\ell^2} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2}$. Zeigen Sie, dass die Bilinearform

$$a : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}, \quad a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n y_n,$$

stetig und positiv definit, jedoch nicht ℓ^2-elliptisch ist.

b.w.

Aufgabe 19:

Sei Ω ein Gebiet.

(a) Zeigen Sie, dass der Raum $C(\Omega)$ versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ nicht vollständig ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Raum $C^1(\Omega)$ versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ nicht vollständig ist.

(Wenn Sie möchten, können Sie für die Konstruktion Ihrer Gegenbeispiele annehmen, dass Ω ein reelles Intervall ist.)

Aufgabe 20:

Hier werden wir NETGEN/NGSOLVE zusammen mit PYTHON verwenden.

(a) Lesen und verstehen Sie das Beispiel "1.1 First NGSolve example" auf der NGS-Py-Homepage. Stellen Sie sich z.B. folgende Fragen:
Welche Gleichung wird gelöst? Auf welchen Gebiet? Wie kommt die Integralgleichung zustande? Aus welchen Raum sind die Ansatz- bzw. Testfunktionen? etc.

(b) Verändern Sie das Beispiel so, dass die Inhomogenität des Poisson-Problems jetzt

$$f(x, y) = 10 \exp(x) \cos(y)$$

ist und die Dirichlet-Bedingung $u = 0$ auf dem gesamten Rand von Ω gilt.

(c) Setzen Sie die maximale Gittergröße auf 0.3 und die Ordnung des Finite Elemente Raums auf 1. Erzeugen Sie nun eine neue leere Gitterfunktion und tragen Sie an die $(k+1)$-te Stelle den Wert 1 ein, wobei k ein Wert zwischen 0 und `fes.ndof-1` ist. Verwenden Sie dazu die zwei Befehle:

```
gfneu = GridFunction(fes)
gfneu.vec.FV()[ k ] = 1
```

Stellen Sie die Gitterfunktion mit Hilfe des `Draw`-Befehls grafisch dar. Welche Funktionen plotten Sie hier?

Besprechung in der Übung am Freitag, 10. Mai 2019.