

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 4. Übungsblatt

Aufgabe 13:

Gegeben sei die folgende partielle Differentialgleichung mit inhomogenen Robin-Randbedingungen

$$-\Delta u + u = f \quad \text{in } \Omega, \quad \partial_\nu u + u = g \quad \text{auf } \Gamma. \quad (*)$$

Zeigen Sie für $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) u ist Lösung von (*).

(b) Es gilt

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + uv \right) dx dy + \int_{\Gamma} uv \, d\sigma = \int_{\Omega} f v \, dx dy + \int_{\Gamma} g v \, d\sigma$$

für alle $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise C^1 .

(c) u ist Lösung des Variationsproblems

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + v^2 \right] dx dy + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} v^2 \, d\sigma - \int_{\Omega} f v \, dx dy - \int_{\Gamma} g v \, d\sigma = \min!$$

unter allen $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise C^1 .

Aufgabe 14:

Beweisen Sie die Green'schen Formeln aus der Vorlesung:

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle + v \Delta u \, dx = \int_{\Gamma} v \partial_\nu u \, d\sigma \quad (1)$$

und

$$\int_{\Omega} v \Delta u - u \Delta v \, dx = \int_{\Gamma} v \partial_\nu u - u \partial_\nu v \, d\sigma \quad (2)$$

mit $\Gamma = \partial\Omega$, $\vec{\nu} : \Gamma \rightarrow \mathcal{S}^n$ das äußere Normalenvektorfeld und $\partial_\nu u = \vec{\nu} \cdot \nabla u$ die äußere Normalenableitung.

Welche Voraussetzungen benötigen Sie um den Gaußschen Integralsatz anwenden zu können?

Aufgabe 15:

- (a) Bestimmen Sie für die Dreiecke aus Abbildung 1 die linearen Basisfunktionen, die jeweils auf einer Ecke den Wert 1, auf den anderen beiden den Wert 0 annehmen.

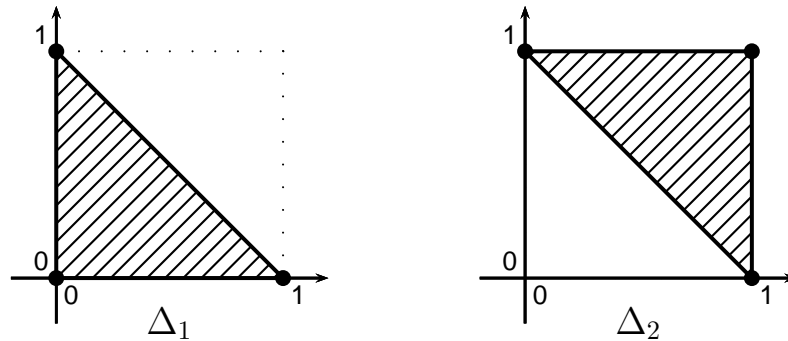


Abbildung 1: Dreiecke

- (b) Bestimmen Sie für $\Omega = \Delta_1$ die 3×3 -Steifigkeitsmatrix $A = (a(\varphi_r, \varphi_s))_{r,s}$ für die Differentialgleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad \partial_\nu u = 0 \quad \text{auf } \Gamma.$$

Aufgabe 16:

In dieser Aufgabe werden wir mit Hilfe des Programms NETGEN dreidimensionale Geometrien bearbeiten und erstellen. Den Link zur Installationsanleitung von NGS-Py (bzw. NETGEN/NGSOLVE) finden Sie auf der Vorlesungshomepage.

- (a) Lesen Sie sich das Kapitel “Constructive Solid Geometry” in der NETGEN-Dokumentation von Joachim Schöberl durch, die unter <https://github.com/NGSolve/netgen/blob/master/doc/ng4.pdf> zu finden ist. Sehen Sie sich außerdem die `.geo`-Beispiele unter `.../netgen/tree/master/tutorials` in der NETGEN-GUI und in einem Texteditor an.

Hinweis: Die `.geo`-Dateien wurden auch bei der Installation mit abgespeichert. Die Pfade, unter denen sie zu finden sind, stehen auf der NGS-Py-Seite unter “Getting started with NETGEN/NGSOLVE”.

- (b) Erstellen Sie nun die folgenden Geometrien, indem Sie vorhandene Beispiele ändern oder neue `.geo`-Dateien schreiben:
- den Quader $[-1, 1] \times [0, 1] \times [1.5, 2]$ auf zwei verschiedene Arten, d.h. als Schnitt von sechs Ebenen und direkt mit nur einem Befehl,
 - den Würfel $[0, 1]^3$ ohne den kleineren Würfel $[0.25, 0.75]^2 \times [0.5, 1]$ (das Beispiel `fichera.geo` ist hier hilfreich),
 - zwei ineinander verschlungene Tori (wie zwei Glieder einer Kette),
 - eine quadratische Pyramide mit Grundfläche $[-1, 1]^2$ und Höhe 1,
 - eine Tasse, natürlich mit einem Henkel.