

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 3. Übungsblatt

Aufgabe 9:

Sei $\Omega = [0, 1]^2$ und die Differentialgleichung

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \forall x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$$

gegeben. Geben Sie die Matrix A und den Vektor b aus dem linearen Gleichungssystem

$$Ax = b$$

an, welches aus der Finite Differenzen Approximation obiger Gleichung mit einem regelmäßigen Gitter mit Gitterweite $h = \frac{1}{N+1}$ hervorgeht.

Aufgabe 10:

Beweisen Sie das diskrete Vergleichsprinzip, Korollar 3.3, aus der Vorlesung.

Aufgabe 11:

- (a) Zeigen Sie, dass die lokale Approximation des Laplace-Operators in zwei Raumdimensionen durch den 5-Punkte-Stern die Konsistenzordnung 2 hat, d.h. dass

$$\partial_{xx}u(x, y) + \partial_{yy}u(x, y) = \frac{-4u(x, y) + u(x - h, y) + u(x + h, y) + u(x, y - h) + u(x, y + h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

gilt.

- (b) Zeigen Sie, dass das kompakte Finite Differenzen Verfahren zur Approximation von $\partial_{xx}u(x)$

$$u(x - h) - 2u(x) + u(x + h) \approx \frac{h^2}{12}\partial_{xxx}u(x - h) + \frac{5h^2}{6}\partial_{xxx}u(x) + \frac{h^2}{12}\partial_{xxx}u(x + h)$$

die Konsistenzordnung 4 hat.

Aufgabe 12:

Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{cases} u''(x) + q(x)u(x) = f(x) & \forall x \in \Omega = (a, b) \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

- (a) Implementieren Sie eine Funktion `fd02(f, q, N, a, b)`, die mittels einer zentralen Finite Differenzen Approximation der zweiten Ableitung eine approximative Lösung u von Gleichung (1) auf einem äquidistanten Gitter mit N Gitterpunkten berechnet.
- (b) Implementieren Sie eine Funktion `fd04(f, q, N, a, b)`, die mittels des kompakten Finite Differenzen Verfahrens aus Aufgabe 11(b) eine approximative Lösung u von (1) auf einem äquidistanten Gitter mit N Gitterpunkten berechnet.

Hierbei sind `f` und `q` jeweils "function handles" zur Auswertung von f und q und `a` und `b` die Randpunkte des Gebiets Ω .

- (c) Testen Sie Ihre Funktionen jeweils an dem Beispiel

$$\begin{cases} u''(x) + (1 + 4x^2)u(x) = -2 \sin(x^2) (2 \cos(x)x + \sin(x)) & \forall x \in (0, \pi) \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases}$$

dessen exakte Lösung durch $u(x) = \sin(x) \cos(x^2)$ gegeben ist und vergewissern Sie sich, dass Sie die in Aufgabe 11 berechneten Konsistenzordnungen erhalten.