Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Marina Fischer

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

09. April 2019

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 2. Übungsblatt

Aufgabe 5:

Beweisen Sie das Fundamentallemma der Variationsrechnung. Das heißt, zeigen Sie, dass für alle $f \in C(\Omega, \mathbb{R}), \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet mit

$$\int_\Omega fg \, \mathrm{d}x = 0 \qquad \forall \; g \in C(\Omega, \mathbb{R})$$

die Identität

$$f \equiv 0 \qquad \text{in} \qquad \Omega$$

erfüllt ist.

Aufgabe 6: (Euler, 1779)

Sei das Variationsintegral

$$\mathcal{J}(u) := \int_0^1 (u'(x)^2 - 1)^2 \, \mathrm{d}x$$

auf

$$\mathcal{V} := \{ \; u \in \mathrm{PC}^1[0,1] \mid u(0) = u(1) = 0 \; \}$$

gegeben, wobei PC^1 der Raum der stetigen, stückweise stetig-differenzierbaren Funktionen ist.

(a) Raten Sie einen Minimierer u^* für $\mathcal{J}$.
Tipp: $\mathcal{J}(u^*) = 0$.

(b) Zeigen Sie: Auf der kleineren Variationsklasse $\mathcal{V}^1 := \mathcal{V} \cap C^1[0,1]$ ist das Infimum des Funktionals immer noch 0, es wird allerdings von keiner C^1-Funktion angenommen.

Hinweis: Verwenden Sie in (b) Ihre Lösung aus (a), um eine Folge von stetigen Funktionen zu basteln, und denken Sie an das Newton-Schema.

Aufgabe 7:

Sei $\mathbb{S}_2 \subset \mathbb{R}^3$ die Kugel um den Ursprung mit Radius 1 und sei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1/2, 0)$ und $(0, 1/2)$. Durch $\varphi : \mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{\sim} \varphi(D) \subset \mathbb{S}_2$ mit

$$\varphi(u,v) = \left(\frac{(1-u^2)(1-v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)}, \; \frac{(1-u^2)2v}{(1+u^2)(1+v^2)}, \; \frac{2u(1+v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)} \right)^T$$

sei eine Karte von $\mathbb{S}_2$ gegeben.
Berechnen Sie für $f : \mathbb{S}_2 \longrightarrow \mathbb{R}, \; f(x,y,z) = x$, das Integral

$$\int_{\varphi(D)} f(x,y,z) \; \mathrm{d}S(x,y,z).$$

Hinweis: Sie können die notwendigen Berechnungen per Python, Maple, etc. durchführen. Geben Sie aber die Jacobimatrix $\mathrm{D}\varphi$, die Matrix $G = (g_{ij})_{i,j=1}^2$ sowie deren Determinante g an.

b.w.

<u>Aufgabe 8:</u> (Kollokationsverfahren für Randwertprobleme)

Betrachte das Randwertproblem

$$
\begin{aligned}
&y' = f(x,y) \qquad \text{auf} \qquad [a,b], \qquad\qquad f \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)\\
&r(y(a), y(b)) = 0
\end{aligned}
$$

Idee von Kollokationsverfahren: Suche Näherungslösungen u in einem Teilraum von $C([a,b],\mathbb{R}^d)$ und verlange, dass diese die Differentialgleichung in endlich vielen Punkten und die Randbedingung erfüllen.

Wähle eine Unterteilung von $[a,b]$ in $a = x_1 < \dots < x_{m+1} = b$, nenne die Schrittweiten $h_j = x_{j+1} - x_j$. Wähle weiterhin *Kollokationsknoten* $c_1, \dots, c_s \in [0,1]$ paarweise verschieden.

Kollokationsverfahren: Suche $u : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ stetig, so dass

- $u|_{[x_j,x_{j+1}]} \in \mathcal{P}_s$, $\mathcal{P}_s$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq s$.
- $u'(x) = f(x, u(x)) \quad$ für $x = x_j + c_k h_j$, $1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq s$
- $r(u(a), u(b)) = 0$

Bestimmen Sie für $d = 1$, $s = 2$, Kollokationsknoten $c_1 = 1/3$ und $c_2 = 2/3$, $m = 3$, $a = x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 7$, $x_4 = 10 = b$ und die rechte Seite $f(x, y(x)) = x + y(x)$ das entstehende lineare Gleichungssystem. Als Randbedingung sei $y(a) + y(b) = 1$ vorgegeben.

<u>Hinweis:</u> Benutzen Sie für die Darstellung der Polynome die Lagrange-Basis zu den Knoten $0,\ 1/2,\ 1$

$$
u_i(\tau) = \sum_{k=0}^{s} \lambda_{i,k} l_{i,k}(\tau),
$$

wobei Sie die Polynome auf das Einheitsintervall transformieren. Wieso ergeben sich Polynome zweiten Grades? Vergessen Sie bei der Aufstellung des Gleichungssystems nicht die Stetigkeit von u.

Besprechung in der Übung am Freitag, 26. April 2019.