MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

02. JULI 2019

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 14. Übungsblatt

Aufgabe 55:

Sei $X = C_0(\mathbb{R}) := \{ f \in C(\mathbb{R}) \mid \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt mit $|f(s)| < \epsilon$ für $s \in \mathbb{R} \backslash K \}$ versehen mit der Supremumsnorm. Für festes $\alpha > 0$ definiere den Operator A_α als den Differenzenquotienten

$$A_\alpha f(s) := \tfrac{1}{\alpha}(f(s+\alpha) - f(s)), \qquad f \in X,\ s \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass $A_\alpha \in \mathcal{L}(X)$ mit $\|A_\alpha\| \leq 2/\alpha$, und daher

$$\|\exp(tA_\alpha)\| \leq \exp(t\,\tfrac{2}{\alpha}) \qquad \forall\, t > 0.$$

gilt. Zeigen Sie weiter, dass $\exp(tA_\alpha)$ explizit als

$$\exp(tA_\alpha)f(s) = \exp(-\tfrac{t}{\alpha}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{t}{\alpha})^k}{k!} f(s+k\alpha), \quad f \in X,\ s \in \mathbb{R}$$

angegeben werden kann und daher die viel bessere Bedingung

$$\|\exp(tA_\alpha)\| = 1.$$

erfüllt.

Aufgabe 56:

Für ein stückweise C^1-berandetes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei die parabolische Differentialgleichung mit Dirichlet-Randbedingungen

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= -Lu(x,t) && \text{für } (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u(x,t) &= 0 && \text{für } x \in \Gamma := \partial\Omega,\ t \in (0,T) \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{für } x \in \Omega \end{aligned}$$

auf $H = L^2(\Omega)$ gegeben. Hierbei sei L der elliptische Differentialoperator, der die Eigenschaften aus Kapitel 3, Definition (3.1) erfüllt.
Geben Sie die schwache Formulierung des Anfangs-Randwertproblems an und weisen Sie nach, dass klassische Lösungen, das heißt $u \in C^2(\Omega \times (0,T))$, auch schwache Lösungen sind.

b.w.

Aufgabe 57:

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Neumann-Randbedingungen

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= \Delta_x u(x,t) && \text{für } (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ \partial_\nu u(x,t) &= 0 && \text{für } x \in \Gamma := \partial\Omega,\ t \in (0,T) \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{für } x \in \Omega \end{aligned}$$

auf $H = L^2(\Omega)$.

(a) Geben Sie die schwache Formulierung an. Welcher Raum V ist der geeignete Grundraum? Wie sieht die Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ aus und ist sie V- elliptisch?

(b) Zeigen Sie, dass die Bilinearform a aus Teil a) die Gårdingungleichung

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|_V^2 - c\|u\|_H^2$$

erfüllt. Können Sie α und c konkret angeben?

Aufgabe 58:

Zeigen Sie, dass, falls die Bilinearform a in der schwachen Formulierung einer parabolischen Gleichung

$$\partial_t (u,v)_H + a(u,v) = (f,v)_H, \quad \forall v \in V$$

anstelle der V-Elliptizität nur die Gårdingungleichung erfüllt, die Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen der Vorlesung weiterhin gelten. Wie sieht nun die Abschätzung für die Lösung u aus?

Hinweis: Betrachten Sie ein äquivalentes Problem mit Lösung $w(t) = \mathrm{e}^{-ct}u(t)$ und zeigen Sie für die dazu gehörige Bilinearform die V-Elliptizität.

Besprechung in der Übung am Freitag, 12. Juli 2019.