MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

18. JUNI 2019

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 12. Übungsblatt

Aufgabe 47:

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren des durch Finite Differenzen auf $[0,1]^2$ diskretisierten Laplace-Operators mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Als Schrittweite in x- und y-Richtung sei wie immer $h = \frac{1}{m+1}$ gewählt.

Hinweis: Benutzen Sie Ihr Wissen über die Eigenwerte der Jacobi-Iterationsmatrix.

Aufgabe 48:

Zeigen Sie, dass sich die Iterationsvorschrift

$$x^{(k+1)} = \left(I - \frac{1}{\lambda_{\max}(A_h)} A_h\right) x^{(k)} + \frac{1}{\lambda_{\max}(A_h)} b_h$$

im Modellproblem aus Aufgabe 47 für genügend große m der mit $\omega = 1/2$ gedämpften Jacobi-Iteration nähert.

Aufgabe 49:

Überlegen Sie sich für welche θ die Richardson-Iteration

$$x^{(k+1)} = (I - \theta A)x^{(k)} + \theta b$$

gegen $\widehat{x} = A^{-1}b$, mit A symmetrisch und positiv definit, konvergiert.

Aufgabe 50:

Zeigen Sie Lemma (4.3), d.h. zeigen Sie, dass gilt:

(a) $\|\!|\cdot|\!\|_s$ ist tatsächlich eine Norm.

(b) $\|\!|x|\!\|_s \leq \|\!|x|\!\|_r^{1/2} \cdot \|\!|x|\!\|_t^{1/2}$ für $s = \frac{t+r}{2}$ und alle $x \in \mathbb{R}^N$.

Besprechung in der Übung am Freitag, 28. Juni 2019.