MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

11. JUNI 2019

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 11. Übungsblatt

Aufgabe 43:

Zeigen Sie, dass

$$\varphi \mapsto A\varphi, \qquad (A\varphi)(x) = \int_a^b \sin(x+y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

ein kompakter Operator auf $L^2([a,b])$, $b > a$, ist.

Hinweis: Verwenden Sie nicht direkt die Definition, sondern Aussagen aus der Vorlesung bzw. der Übung.

Aufgabe 44:

Finden Sie die Eigenvektoren zu den nicht-Null Eigenwerten der Gauß-Seidel Iterationsmatrix G für das in der Vorlesung betrachtete Modellproblem

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{in} \quad \Omega = (0,1)^2 \\ \quad u &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Aufgabe 45:

Berechnen Sie die Einträge der Prolongationsmatrizen für folgende Fälle. (*Äquivalent: Finden Sie eine Matrixdarstellung der natürlichen Einbettung.*) Nutzen Sie dabei aus, dass eine Verfeinerung eines Gitters über die Bilder einer Verfeinerung des Referenzelements erzeugt werden kann.

(a) Quadratische Lagrange-Elemente auf Intervallen in $\mathbb{R}$, Verfeinerung durch Halbierung jedes Intervalls.

(b) Lineare Lagrange-Elemente auf Dreiecksgittern in $\mathbb{R}^2$, Verfeinerung durch Unterteilung jedes Dreiecks in vier kongruente Teildreiecke.

(c) Bilineare Elemente auf Vierecksgittern in $\mathbb{R}^2$, Verfeinerung jedes Vierecks in vier Teilvierecke durch Verbinden der gegenüberliegenden Kantenmittelpunkte.

(d) Lineare Lagrange-Elemente auf Tetraedergittern in $\mathbb{R}^3$, Verfeinerung jedes Tetraeders in acht Teiltetraeder unter Verwendung der Ecken und der Kantenmittelpunkte.

Aufgabe 46:

Auf der Homepage finden Sie die Datei `precondition.py`, in der die Poisson-Gleichung auf dem Einheitsquadrat unter Verwendung verschiedener Vorkonditionierer gelöst wird. Stellen Sie für jeden Vorkonditionierer die Anzahl der benötigten Iterationsschritte in Abhängigkeit der Freiheitsgrade zusammen in einer Grafik dar. Verfeinern Sie hierbei das Gitter bis zu 8 mal.

Besprechung in der Übung am Freitag, 21. Juni 2019.