MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

04. JUNI 2019

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 10. Übungsblatt

Aufgabe 38:

Zeigen Sie:

(a) Ist $T : V \to W$ ein linearer, beschränkter Operator und $\dim(\operatorname{im}(T)) < \infty$, so ist T kompakt.

(b) Ist Ω beschränkt, stückweise C^1-berandet und $\mathcal{T}_n$ eine Triangulierung von Ω. Dann ist

$$T_n \ : \ H^1(\Omega) \to L^2(\Omega), \ v|_{K_i} \mapsto M_{K_i}(v)$$

kompakt. Dabei seien $\{ \ K_i \mid i \in I_n \ \} = \mathcal{T}_n$ die Dreiecke der Triangulierung und M_{K_i} der Mittelwert-Operator aus Lemma (4.1).

Aufgabe 39:

Sei $I = [a, b]$, $a < b$, ein reelles Intervall. Die Vorschrift $u \mapsto \omega_I(u) := \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$ definiert ein Funktional ω_I auf $L^1(I)$. Wie üblich sei δ_x die Punktauswertung an der Stelle x (definiert für stetige Funktionen).

(a) Zeigen Sie, dass $(I,\ \mathbb{P}_2(I),\ \Sigma)$ ein finites Element ist, falls $\Sigma = \{\delta_a,\ \delta_b,\ \omega_I\}$. Bestimmen Sie die nodale Basis von $\mathbb{P}_2(I)$.

(b) Sei nun $\widetilde{\Sigma} = \{\delta_a,\ \omega_I\}$. Zeigen Sie, dass $(I,\ \mathbb{P}_1(I),\ \widetilde{\Sigma})$ ein Finites Element ist. Wieso ist das Tripel $(I,\ \mathbb{P}_1(I),\ \widetilde{\widetilde{\Sigma}})$ mit $\widetilde{\widetilde{\Sigma}} = \{\delta_{(a+b)/2},\ \omega_I\}$ kein Finites Element?

(c) Seien nun $\hat{I} = [0, 1]$ und $\widehat{\Sigma} = \{\omega_{[0,2/3]},\ \omega_{[1/3,1]}\}$. Ist $(\hat{I},\ \mathbb{P}_1(\hat{I}),\ \widehat{\Sigma})$ ein Finites Element?

Aufgabe 40:

Es sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ strikt diagonaldominant, d.h.

$$\max_{i=1,\dots,n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1.$$

Zeigen Sie, dass sowohl das Jacobi- als auch das Gauß-Seidel-Verfahren angewandt auf $Ax = b$ bei beliebigem Startwert x_0 und für jede rechte Seite b gegen $A^{-1}b$ konvergiert.

Aufgabe 41:

Implementieren Sie das Jacobi-Verfahren zum Lösen von

$$Ax = b,$$

A sei dabei die Finite Differenzen Approximation an den Laplace Operator auf $[0, 1]^3$ mit Gitterweite $h = 1/(m+1)$, $m = 49$, mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Wählen Sie $b = 0$ und $x^{(0)}$ als Array der Größe m^3 mit Zufallszahlen aus $[0, 1)$. Führen Sie $k = 200$ Iterationen durch. Plotten Sie den Logarithmus des Fehlers gegen die Anzahl der Iterationen.

Aufgabe 42:

Implementieren Sie, analog zu Aufgabe 41, das Gauß-Seidel-Verfahren.

Besprechung in der Übung am Freitag, 14. Juni 2019.