MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
GEORG JANSING
ANDREAS TROLL
FELIX LIEDER
29. APRIL 2015

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

10	11	12	13	Σ

NAME: _____
MAT-NR.: _____
NAME: _____
MAT-NR.: _____
NAME: _____
MAT-NR.: _____
GRUPPE: _____

Numerik I – 4. Übungsblatt

Aufgabe 10: (3+3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie das Volumen V des Rotationskörpers R, der gegeben ist als

$$R = \{(x, y, z) | z \in [-\tfrac{h}{2}, \tfrac{h}{2}], \|(x, y)\| \leq f(z)\}$$

mit einer stetigen Funktion $f : [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(b) Wir wollen nun das Volumen eines Fasses nach der Kepler'schen Fassregel bestimmen: Wir können das Fass von Innen gemäß der Skizze in Abbildung 10 ausmessen. Dabei können wir die Länge l des gestrichelten Messstabes und den Neigungswinkel φ messen. Approximieren Sie das Volumen des Fasses mit Hilfe der Simpsonregel, indem Sie die Länge des Stabes und den Winkel an den beiden Extrempunkten und die Länge in der Mitte messen.

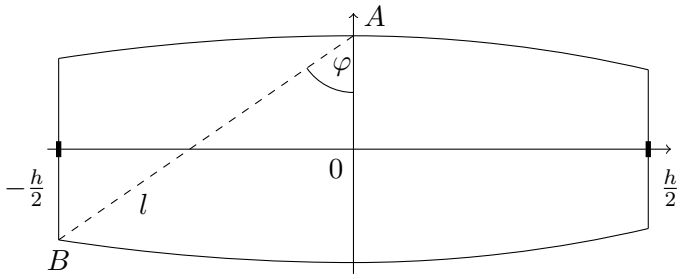
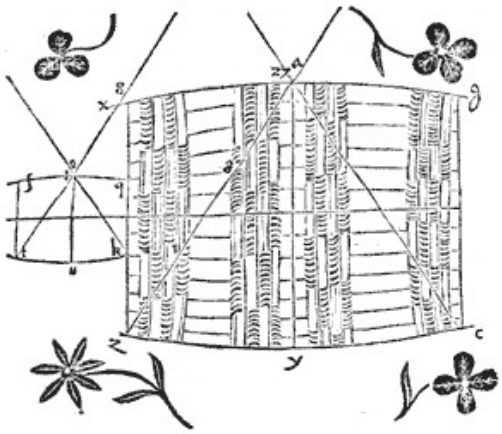


Abbildung 1: Veranschaulichung der Kepler'schen Messmethode für das Volumen eines Fasses



Quelle: `http://www.keplerraum.at/fass.html`

b.w.

Aufgabe 11:

Seien Knoten $0 \leq c_1 < \ldots < c_s \leq 1$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Lagrange-Polynome

$$l_j(t) := \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{s} \frac{t - c_k}{c_j - c_k} \tag{1}$$

eine Basis des Raumes $\mathcal{P}_{s-1}$, d.h. des Raumes aller Polynome auf $[0, 1]$ vom Grad höchstens $s - 1$, bilden.

Aufgabe 12: (4+2 Punkte)

Bezeichne mit

$$0\varepsilon(h)_f := \left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{j=1}^{N} h \sum_{i=1}^{s} b_i f(x_{j-1} + c_i h) \right| \tag{2}$$

den Fehler bei der Approximation des Integrals über die Funktion f durch die Quadraturformel $(b_i, c_i)_{i=1}^s$ mit einer Zerlegung von $[a, b]$ in Teilintervalle mit konstanter Länge h. Falls f p-mal stetig differenzierbar ist und die Quadraturformel Ordnung p besitzt, so gilt laut Korollar 1.11 (KIT Hochbruck Skript) die Abschätzung

$$\varepsilon(h)_f \leq Ch^p \tag{3}$$

wobei C eine von h unabhängige Konstante ist.

(a) Zeigen Sie, dass dann

$$\log(\varepsilon(h)_f) \leq p \log(h) + C' \tag{4}$$

für eine Konstante C' gilt.

(b) Angenommen, man trägt den Fehler in einem Diagramm mit logarithmisch skalierten Achsen gegen die maximale Schrittweite h auf. Was ist dann die geometrische Interpretation von (4) für $h \ll 1$?

Aufgabe 13: (Ordnungsbedingungen für gewichtete Quadraturformeln)

Wir approximieren

$$\int_\alpha^\beta w(x) f(x)\, \mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{s} b_i f(c_i).$$

Zeigen Sie: Diese Formel ist exakt für alle Polynome vom Grad $\leq p - 1$ genau dann, wenn

$$\sum_{i=1}^{s} b_i c_i^{q-1} = \int_\alpha^\beta x^{q-1} w(x) \mathrm{d}x \qquad 1 \leq q \leq p.$$

Abgabe der Übungsaufgaben am Mittwoch, 6. Mai zu Beginn der Vorlesung.