Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Georg Jansing
Li Luo

30.7.2013

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Numerik I – Klausur

Aufgabe 1: (10 Punkte bzw. 8 Punkte) [wahr | falsch]

1. Jede symmetrische Quadraturformel hat gerade Ordnung. [|]
2. Die maximale Ordnung einer Quadraturformel mit s Knoten ist $2(s-1)$. [|]
3. Sind s paarweise verschiedene Knoten c_i, $i = 1, \ldots, s$ vorgegeben, so gibt es genau eine Quadraturformel mit der Ordnung p, so dass $p \geq s$. [|]
4. Das Newton-Verfahren zur Lösung von $f(x) = 0$ für $f \in C^3(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit Startvektor $x_0 = (0, 0)^T$ konvergiert quadratisch. [|]
5. Die Multiplikation zweier reeller Zahlen ist gut konditioniert. [|]
6. Die Subtraktion zweier komplexer Zahlen ist gut konditioniert. [|]
7. Der Clenshaw Algorithmus erlaubt es, ein Polynom in Lagrange-Darstellung stabil auszuwerten. [|]
8. Der eingespannte kubische Spline s einer Funktion f zu paarweise verschiedenen Stütztstellen x_i existiert und ist eindeutig. [|]

Hinweis: *Studentinnen und Studenten die nur einen Schein für den Pflichtbereich Mathematik im Hauptfach Informatik erwerben wollen, müssen die beiden letzten Fragen nicht beantworten. Es können keine Extrapunkte durch diese Fragen erzielt werden.*

9. Das Verfahren $y_{n+1} = y_n + hf(t_n + h, y_n)$ ist ein Runge-Kutta-Verfahren. [|]
10. Das Verfahren $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}))$ ist ein Mehrschrittverfahren. [|]

Hinweis: Sie müssen bei allen folgenden Aufgaben auch Ihre Argumentation und Ihre Rechenwege aufschreiben, nur Ergebnisse anzugeben reicht nicht aus. Bitte benutzen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.

Aufgabe 2: (5 + 5 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Ordnung folgender dreistufiger Quadraturformel mit Knoten $c_1 = 1/6$, $c_2 = 1/2$ und $c_3 = 5/6$ und Gewichten $b_1 = 3/8$, $b_2 = 1/4$ und $b_3 = 3/8$.

Hinweis: Die Knoten und Gewichte der Gauß-Quadraturformel sind: $b_1 = b_3 = \frac{5}{18}$, $b_2 = \frac{8}{18}$, $c_{1,3} = \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{15}}{10}$ und $c_2 = \frac{1}{2}$.

b) Bestimmen Sie eine zweistufige Quadraturformel $(b_i, c_i)_{i=1}^2$ zur Approximation von $\int_0^1 f(x)dx$ mit $c_2 = 1$ so, dass die Ordnung der Quadraturformel maximal wird.

Aufgabe 3: (2 + 2 + 4 Punkte)

a) Berechnen Sie mit Hilfe von dividierten Differenzen in einem Newtonschema das Interpolationspolynom p in $\mathcal{P}_2$ zu folgenden Daten $p(-1) = 2$, $p(0) = 3$, $p(1) = 2$.

b) Werten Sie das Polynom aus a) mit Hilfe des Hornerschemas an der Stelle $x = 2$ aus.

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Newtonschemas ein Polynom $q \in \mathcal{P}_4$ so, dass $q(0) = 3$, $q(1) = 2$, $q'(1) = 0$, $q''(1) = 8$ und $q'(0) = 0$ gilt, wobei q' und q'', die erste bzw. zweite Ableitung ist.

l **Aufgabe 4:** (1 + 5 Punkte)

Zur Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems

$$f(x) = 0 \text{ mit } f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

kann man eine Fixpunktiteration verwenden.

a) Formulieren Sie hierzu die Iterationsvorschrift.

b) Geben Sie den Pseudocode einer Funktion `FixP` (`function [x,it] = FixP(f,x0,N,tol)` in Matlabnotation) an, die höchstens `N` Schritte der Fixpunktiteration mit Start `x0` durchführt und das Ergebnis der Iteration `x` und die Anzahl der tatsächlich benötigten Iterationen `it` zurückgibt. `f` ist hierbei eine Funktion zur Auswertung von $f(x)$. Verwenden Sie das Kriterium, ob die Norm des Funktionswertes der aktuellen Iterierten kleiner als `tol` ist, als Abbruchkriterium.

Aufgabe 5: (4 + 4 Punkte)

Sei für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Für welche reellen α lässt sich die Cholesky-Zerlegung von A_α berechnen? Berechnen Sie diese soweit möglich.

b) Verwenden Sie nun die Cholesky-Zerlegung von A_1 ($\alpha = 1$) aus Teil a), um das lineare Gleichungssystem $A_1 x = b$, für $b = (1, 0, 2)^T$ durch Vorwärts- und Rückwärtselimination zu lösen.

Aufgabe 6: (3 + 2 + 3 Punkte)

Hinweis: *Studentinnen und Studenten die einen Schein für den Pflichtbereich Mathematik im Hauptfach Informatik erwerben wollen müssen diese Aufgabe nicht bearbeiten. Es können keine Extrapunkte durch Bearbeitung dieser Aufgabe erzielt werden.*

Sei

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, T] \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

eine Differentialgleichung mit glatter rechter Seite $f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, sodass die Lösung $y(t)$ existiert und eindeutig ist.

a) Zeigen Sie: Falls für einen festen Vektor $z \in \mathbb{R}^d$, $f(t, y)^T z = \sum_{j=1}^d f_j(t, y) z_j = 0$ für alle $(t, y) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^d$ gilt, so gilt für die Diskretisierung y_n obiger Differentialgleichung mit Schrittweite h mit einem expliziten Runge-Kutta-Verfahren $y_n^T z = y_0^T z$ für alle n, mit $nh \in [t_0, T]$.

b) Zur numerischen Lösung obiger Differentialgleichung kann man die Iterationsvorschrift

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, \frac{y_{n+1} + y_n}{2}\right)$$

verwenden.

i) Geben Sie für dieses Verfahren die Iterationsvorschrift für den Fall $f(t, y) = \lambda y$ an und lösen Sie nach y_{n+1} auf.

ii) Lässt sich dieses Verfahren zu einem äquivalenten einstufigen Runge-Kutta-Verfahren umformulieren? Falls ja, geben Sie das zugehörige Butcher-Tableau an.