Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE

11.12.2025

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 9. Übungsblatt

Aufgabe 33:

1. Für $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 3\}$ sei die Funktion f gegeben durch

$$f(x) := \frac{5x^3 - 3x - 2}{(2 + x)(3 - x)}.$$

1.i) Berechnen Sie die Taylorpolynome $P_1, \ldots, P_{15}$ von f entwickelt in $x = 0$. Wie die Taylorpolynome definiert sind, finden Sie hier `https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor's_theorem`

1.ii) Zeichnen Sie die Graphen von $f, P_6, \ldots, P_{11}$ in ein Bild über den Intervallen $[-2, 3]$ und $[-1, 3/2]$ in verschiedenen Farben und fügen sie jeweils eine Legende außerhalb des Plots hinzu.

1.iii) Berechnen Sie den numerisch Wert von $|f(a) - P_j(a)|$ für $a \in \{-\frac{1}{2}, 1\}$ und $j = 1, ..., 15$.

2. Es sei $f(x) := \sin(x)/x$ und es sei F eine Stammfunktion von f. Wie lautet die Bezeichnung von F in `sympy`?

2.i) Berechnen Sie die Taylorentwicklung von f und F bis zur Ordnung 16.

2.ii) Differenzieren Sie die Taylorentwicklung von F und vergleichen Sie sie mit der von f.

Aufgabe 34:

Unter welchen hinreichenden Bedingungen an a, b, x, y und z sind folgende Umformungen gültig? Veranlassen Sie `sympy` dazu diese Umformungen durchzuführen

(a) $x^{a+b} = x^a x^b$

(b) $(xy)^a = x^a y^a$

(c) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

(d) $\ln(\mathrm{e}^z) = z$

Aufgabe 35:

Zeichnen Sie für $z \in \mathbb{C}$ die Lösungsmenge von

$$\left|\frac{R(z)}{e^z}\right| = 1,$$

mit der rationalen Funktion

$$R(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z}{1 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{6}z^2}$$

im Bereich $[-4, 4] \times i[-5, 5]$.

Bemerkung: Bei dieser Lösungsmenge handelt es sich um einen so genannten Ordnungsstern.

bitte wenden

Aufgabe 36:

Gegeben sei die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 36x^2 + 120x}{9x^2 + 96x + 120}.$$

Finden Sie die a_k, $k = 0, \ldots, 5$, des Kettenbruches

$$g(x) = a_0 + \cfrac{x}{a_1 + \cfrac{x}{a_2 + \cfrac{x}{a_3 + \cfrac{x}{a_4 + \cfrac{x}{a_5}}}}},$$

so, dass $f(x) = g(x)$ für alle x gilt.

Besprechung in den Übungen vom 17.-19. Dezember 2025.