Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE

04.12.2025

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 8. Übungsblatt

Aufgabe 29:

Für $\varepsilon > 0$ ist die Gleichung $x^3 - x^2 + \frac{2}{9}x = \varepsilon$ gegeben. Lösen Sie diese Gleichung symbolisch. Sie erhalten drei verschiedene, von ε abhängige Lösungen. Bestimmen Sie bei allen Lösungen den Grenzwert für $\varepsilon \to 0$.

Der Satz von Rouché, der allerdings erst in der Funktionentheorie gezeigt werden wird, besagt, dass diese Grenzwerte die Lösungen der Gleichung $x^3 - x^2 + \frac{2}{9}x = 0$ sind. Bestätigen Sie das, indem Sie einerseits jeweils den Real- und Imaginärteil der drei Grenzwerte bestimmen und andererseits die Grenzwerte numerisch auswerten.

Aufgabe 30:

Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$$

(a) Bestimmen Sie die erste, zweite und dritte Ableitung, $\frac{d}{dx}f(x)$, $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ und $\frac{d^3}{dx^3}f(x)$, von f.

(b) Berechnen Sie (mit `for`-Schleifen) alle paarweisen Schnittpunkte von f, $\frac{d}{dx}f(x)$, $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ und $\frac{d^3}{dx^3}f(x)$. Die imaginären Schnittpunkt die solve findet müssen Sie aussortieren.

(c) Zeichnen Sie f, $\frac{d}{dx}f(x)$, $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ und $\frac{d^3}{dx^3}f(x)$ in unterschiedlichen Farben in eine Graphik und fügen Sie eine Legende mit geeigneten Labels hinzu.

(d) Fügen Sie die Schnittpunkte aus (b) als schwarze Kreise hinzu und wählen Sie den Definitionsbereich so, dass ein aussagekräftiges Bild entsteht.

Tipp: Mit einer Liste in (b) können Sie sich in (d) viel Arbeit sparen.

Aufgabe 31:

(a) Lösen Sie die Gleichung $2^x - 2\sqrt{x} = 0$ exakt. Überprüfen Sie an einem Plot, ob alle Lösungen gefunden wurden. Berechnen Sie ggf. weitere Lösungen numerisch.

(b) Gehen Sie analog zu (a) mit der Gleichung $3^x - 3x^{2/3} = 0$ vor.

(c) Raten Sie alle Lösungen der Gleichung $a^x - ax^{(a-1)/a} = 0$ für $a \geq 1$. Überprüfen Sie ihre Vermutung für $a \in \{2, \ldots, 10\}$, indem Sie die Lösung zunächst berechnen und als exakte rationale Zahl in die Gleichung einsetzen. Verwenden Sie eine `for`-Schleife und für die Ausgabe die Funktion `display`.

bitte wenden

Aufgabe 32:

Gegeben sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

Schauen Sie sich die Dokumentation von `matplotlib.pyplot.quiver` an.

Zeichnen Sie mit Hilfe des Befehls `quiver` f auf dem Quadrat $[-1,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Definieren Sie sich hierfür die 9^2 kartesischen Gitterpunkte (x_k, y_l) mit $x_k = -1 + \frac{k}{4}$ mit $k = 0, \ldots, 8$ und y_l analog.

In (x_k, y_l) soll ein Pfeil von (x_k, y_l) nach $(x_k + f_1(x_k, y_l), y_l + f_2(x_k, y_l))$ gezeichnet werden.

Zeichnen Sie zur besseren Übersicht Gitterlinien in den Plot, beschränken Sie den x- und y- Achsenbereich geeignet, und skalieren Sie die Länge der Vektorpfeile mit dem Faktor $\frac{1}{2}$.

Sie können auch noch die Vektorpfeile der Länge nach einfärben, indem Sie ein Array mit der Länge der Pfeile und eine `colormap` angeben.

Besprechung in den Übungen vom 10.-12. Dezember 2025.