

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 4. Übungsblatt

Aufgabe 13: Die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist durch die Rekursion

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ für } n \geq 2$$

mit den Anfangswerten $f_0 = f_1 = 1$ definiert. Schreiben Sie eine Funktion

- (a) `fib_rek`, die rekursiv
- (b) `fib_for`, die iterativ mittels einer `for`-Schleife
- (c) `fib_while`, die iterativ mittels einer `while`-Schleife

für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}_0$ die n -te Fibonacci-Zahl f_n berechnet.

Aufgabe 14:

- (a) Schreiben Sie eine Python-Funktion `mycheb(n, x)`, die das n -te Tschebyscheff-Polynom erster Art

$$T_n(x) := \cos(n \arccos(x)), \quad x \in [-1, 1]$$

berechnet. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der `sympy`-Funktion `chebyshevt(n, x)` für verschiedene Werte von n .

- (b) Zeichnen Sie die ersten fünf Tschebyscheff-Polynome erster Art in ein gemeinsames Bild in unterschiedlichen Farben.
- (c) Schreiben Sie eine Python-Funktion `mylaguerre(n, x)`, die das n -te Laguerre-Polynom

$$L_n(x) := \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

berechnet. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der `sympy`-Funktion `laguerre(n, x)` für verschiedene Werte von n .

Hinweis: In Teil (a) müssen Sie in Ihrer Funktion noch eine Umformung veranlassen, welche die Darstellung von T_n auch tatsächlich in ein Polynom überführt.

Aufgabe 15:

Es seien drei Funktionen f, g und h gegeben: $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- (a) Differenzieren Sie mit Hilfe von `sympy` die Funktion

$$k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)g(x)h(x).$$

- (b) Sei nun $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Differenzieren Sie mit Hilfe von `sympy` die Funktion

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^x f(x-y)g(y) \, dy.$$

Beweisen Sie, dass das Ergebnis richtig ist.

Aufgabe 16:

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 50x^2 + 9x - 45$.

- (a) Erstellen Sie zwei Listen: `liste1` mit den Werten $f(k)$ für $k = -5, \dots, 2$ und `liste2` mit den Werten $f(k)$ für $k = -1, \dots, 7$.
- (b) Wandeln Sie die Listen in zwei Mengen A und B um und bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von $A \cup B$ mithilfe eines Befehls. Verwenden Sie die Methode `.union` für Mengen.