Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE

29.01.2026

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 14. Übungsblatt

Aufgabe 53:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x^2 + \frac{xy}{x^2+1} + y + 1$.

(a) Zeigen Sie, dass es eine implizit erklärte Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x, g(x)) = 0$ gibt. Überlegen Sie sich hierzu, dass die Voraussetzungen des Satzes von der impliziten Funktion erfüllt sind.

(b) Zeichnen Sie diese implizite Funktion über dem Intervall $[-3, 2]$.

Aufgabe 54:

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := x^2 \cdot y\,.$$

(a) Bestimmen Sie die kritischen Punkte und die lokalen Extrema von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

(b) Berechnen Sie $\max\{f(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ sowie $\min\{f(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

Hinweis:
Als Hilfe können Sie sich in der englischen Version von Wikipedia unter `https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_multiplier` das Beispiel 3 durchlesen.

Aufgabe 55:

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := x^2 \cdot (y+1) + \frac{y}{2}\,.$$

(a) Zeichnen Sie die Funktion f im Bereich $[-3,3] \times [-3,3]$.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte und die lokalen Extrema von f unter der Nebenbedingung $4x^2 + y^2 = 1$.

Aufgabe 56:

(a) Bestimmen Sie alle möglichen Extremalstellen (x_0^*, x_1^*) von

$$(x_0, x_1) \mapsto f(x_0, x_1) := x_0 \left(4x_0 + \sqrt{2}x_1\right) + x_1 \left(\sqrt{2}x_0 + 5x_1\right)$$

unter der Nebenbedingung $x_0^2 x_1^2 = 1$, die man aus der Forderung erhält, dass die notwendigen Bedingungen erster Ordnung erfüllt sind.

(b) Stellen Sie die Nebenbedingung graphisch in einem Bild als rote Linie dar.

(c) Zeichnen Sie für jede mögliche Extremalstelle die Menge
$\{(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 \,|\, f(x_0, x_1) = f(x_0^*, x_1^*) \text{ und } -2 \le x_0, x_1 \le 2\}$
in das Bild aus (a) ein.

Besprechung in den Übungen vom 4.-6. Februar 2026.