Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle

22.01.2026

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 13. Übungsblatt

Aufgabe 49:

Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1'' &= -\frac{8}{7}y_1 - \frac{1}{7}y_2, \qquad y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 0, \\ y_2'' &= -\frac{8}{7}y_2 - \frac{1}{7}y_1, \qquad y_2(0) = 1, \quad y_2'(0) = 0. \end{aligned}$$

Erstellen Sie eine aussagekräftige Zeichnung, indem Sie die beiden Komponentenfunktionen der Lösung in ein zweidimensionales Bild zeichnen. Machen Sie die Probe!

Aufgabe 50:

Wir betrachen die Anfangswertaufgabe

$$y' = \sqrt{xy}, \quad \text{mit } y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

(a) Lösen Sie (1) mit `dsolve` für die Anfangsbedingungen $y(1) = w_1, w_2, w_3$ mit $w_1 = 0$, $w_2 = \frac{1}{50}$ und $w_3 = \frac{1}{9}$. Zeichnen Sie die Lösungen im Intervall $[0, 2]$.

(b) Schneiden sich die Lösungen? Dann überlegen Sie sich bitte, ob die Kurvenverläufe in Übereinstimmung mit dem Satz von Picard-Lindelöf stehen.

(c) Fügen Sie nun zur Zeichnung das Richtungsfeld der Differentialgleichung hinzu (Tipp: `quiver`).

(d) Erklären Sie in wenigen Zeilen, welche Kurvenabschnitte nicht zur Lösung gehören und zeichnen Sie die Kurven gut sichtbar jeweils über dem maximalen Teilintervall von $x \in [0, 3]$, über dem Sie die Differentialgleichung auch tatsächlich lösen.

bitte wenden

Aufgabe 51:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine hinreichend glatte Abbildung.

Zeigen Sie mit `sympy`, dass durch

$$y(x) = \mathrm{e}^{xA} y_0 + \int_0^x \mathrm{e}^{(x-s)A} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s$$

eine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay + f(x, y), \quad y(0) = y_0$$

definiert wird.

Hinweis: Es reicht, A als `symbol` zu definieren.

Aufgabe 52:

Gesucht ist eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von

$$\left(\sin(2x) + \frac{4}{3}\right) \frac{d}{dx} y(x) = \frac{-y(x) + 1}{5}. \tag{2}$$

(a) Bestimmen Sie eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung (**??**) und geben Sie sie aus.

(b) Bestimmen Sie jeweils für die beiden Startwerte $y(0) = 6$ und $y(0) = -2$ eine Lösung von (**??**).

(c) Zeichnen Sie die beiden Lösungen aus (b) für $x \in [0, 5]$ in verschiedenen Farben in ein Bild.

(d) Ergänzen Sie das Bild aus Teil (c) durch das Vektorfeld in der x, y-Ebene, derart, dass die Vektorpfeile tangential zu den Lösungskurven sind. Beschränken Sie die y-Achse auf den Bereich $[-2, 6]$.

Besprechung in den Übungen vom 28.-30. Januar 2026.