Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE

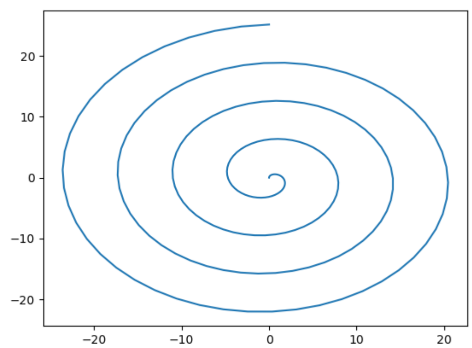
15.01.2026

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 12. Übungsblatt

Aufgabe 45:

(a) Zeichnen Sie die Spirale wie in nebenstehender Abbildung und bestimmen Sie die Bogenlänge der Kurve näherungsweise, indem Sie die Kurve durch einen Polygonzug ersetzen. Die Parametrisierung der Spirale ist:

$$[0, 8\pi] \to \mathbb{R}^2 : \ t \mapsto (t\cos(t), t\sin(t))$$



(b) Berechnen Sie die Bogenlänge L der Spirale exakt. Implementieren Sie dazu eine Pythonfunktion `BogenLaenge(f,t,a,b)`, die die Bogenlänge L der durch die stetig differenzierbare Funktion

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}^n \ t \mapsto (f_0(t), \ldots, f_{n-1}(t))$$

parametrisierten Kurve berechnet. f ist hier eine $1 \times n$ sympy Matrix mit n Ausdrücken, die von dem Symbol t abhängen. a und b sind reelle Zahlen. Für die euklidische Norm des $\mathbb{R}^n$, $\| \cdot \|$, ist

$$L = \int_a^b \left\| \frac{d}{dt} f(t) \right\| dt.$$

Hinweis: Zur Herleitung der Formel für die Bogenlänge, falls das (noch) nicht in AnaII gemacht wurde: `https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-658-19411-6.pdf` (§4 Satz 1)

Aufgabe 46:

In der Vorlesung, Lektion 11, haben wir die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \frac{x^4}{2} + x^3 - x^2y^2 - 2xy^2 - \frac{y^4}{4}$$

untersucht, und drei Exremwerte (Minima/Maxima) gefunden.

(a) Bestimmen Sie den Mittelpunkt (c_0, c_1) und Radius r des Kreises in der (x, y)-Ebene durch die drei Extremwerte. Die drei Extremwerte sollen also jeweils die Gleichung $(x-c_0)^2+(y-c_1)^2 = r^2$ erfüllen. Wählen Sie diejenige Lösung aus, für die $r > 0$ gilt.

(b) Durch $\tilde{g} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto \begin{bmatrix} g_0(t) \\ g_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\sin(t) + c_0 \\ r\cos(t) + c_1 \end{bmatrix}$$

ist eine Parametrisierung des Kreises gegeben. Zeichnen Sie die durch f paramterisierte Fläche zusammen mit der Kurve $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto (g_0(t), g_1(t), f(g_0(t), g_1(t))$.

Hinweis:: Sie können sich Arbeit sparen, wenn Sie entsprechende Teile aus Lektion 11 kopieren.

bitte wenden

Aufgabe 47:

Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' - \frac{y}{x} - x^2 - x^3 + 2x^4 = 0, \quad y(1) = y_0$$

für $y(1) = 1, 0, -1$. Zeichnen Sie die drei Lösungen für $x \in [-1, 2]$ in ein Bild. Warum dürfen sich die Lösungskurven schneiden?

Aufgabe 48:

Asterix und Obelix erhalten Besuch von Diffgleichnix und gehen in einer Ebene auf Wildschweinjagd. Da erspähen sie in 5 km Entfernung einen Römer. Plötzlich zieht Nebel auf. Der Römer rennt kopflos (geradlinig) davon. Obelix nimmt Diffgleichnix auf den Rücken und läuft viermal so schnell wie der Römer auf den Punkt zu, wo der Römer gesichtet wurde. Nachdem Obelix 4 km zurückgelegt hat, hat Diffgleichnix berechnet, wie sie nun laufen müssen, um den Römer sicher zu treffen.

(a) Diffgleichnix hat die Ebene mit Hilfe von Polarkoordinaten (r, ϕ) beschrieben und dabei folgende Gleichung für die Kurve, die den einzuschlagenden Weg beschreibt, gefunden:

$$4(r(\phi) - 1) = \int_0^\phi \left(r(\theta)^2 + r'(\theta)^2\right)^{\frac{1}{2}} \, d\theta.$$

Wie ist er darauf gekommen?

(b) Leiten Sie die Gleichung des Diffgleichnix ab, um eine Differentialgleichung für $r(\phi)$ zu erhalten. Was ist der Anfangswert für die Differentialgleichung?

(c) Lösen Sie mit Hilfe von Sympy dieses Anfangswertproblem.

(d) Zeichnen Sie die Bahnkurve, der Asterix und Obelix nun folgen, um sicher auf den Römer zu treffen.

Besprechung in den Übungen vom 21.-23. Januar 2026.